А. А. Ляминъ и Т. Ѳ. Сваричовскій.

МЕТОДИЧЕСКІЙ СБОРНИКЪ
ГЕОМЕТРИЧЕСКИХЪ ЗАДАЧЪ
НА ВЫЧИСЛЕНІЕ.

II

СТЕРЕОМЕТРІЯ.

Цѣна 70 коп.



МОСКВА.
Изданіе А. С. ПАНАФИДИНОЙ. Лялинъ пер., соб. д.
1913.





Типографія Г. Лисснера и Д. Собко.
Москва, Воздвиженка, Крестовоздвиж. пер., д. 9.

Предисловіе.

Вторая часть предлагаемаго сборника содержитъ задачи *на вычисленіе* по отдѣлу элементарной геометріи пространства (стереометріи), представляющія *чисто-геометрическій интересъ*.

Кромѣ строгой систематизаціи задачъ по методамъ рѣшенія и указаній теоретическаго и методическаго характера, предпосылаемыхъ каждой отдѣльной группѣ, тамъ, гдѣ это казалось необходимымъ, даны примѣрныя рѣшенія задачъ [1]), характеризующихъ данную группу.

Изъ всѣхъ видовъ задачъ, встрѣчающихся обыкновенно въ подобныхъ сборникахъ, приведены только тѣ, которыя непосредственно иллюстрируютъ курсъ стереометріи, при чемъ подборъ этихъ задачъ по возможности разнообразенъ.

Многіе отдѣлы, въ зависимости отъ ихъ значенія, развиты подробнѣе, чѣмъ это дѣлается обыкновенно; таковы, наприм., отдѣлы: 1) о различныхъ положеніяхъ точекъ, прямыхъ и плоскостей въ пространствѣ, 2) о тѣлахъ вращенія, приводимыхъ къ цилиндрамъ и конусамъ, гдѣ разсмотрѣны, въ порядкѣ возрастающей трудности, различныя комбинаціи тѣлъ вращенія, 3) комбинаціи геометрическихъ тѣлъ другъ съ другомъ, и многіе другіе.

Большею частью задачи этого сборника оригинальны; заимствованныя же взяты цѣликомъ или въ передѣлкѣ изъ слѣдующихъ книгъ:

Reidt. Sammlung von Aufgaben und Beispielen aus der Trigonometrie und Stereometrie. II Teil. Stereometrie.

---

[1]) Рѣшенія задачъ сопровождаются чертежами.

Rosenberg. Methodisch geordnete Sammlung von Aufgaben aus der Planimetrie und Stereometrie.

Baur. Methodisch geordnete Aufgaben aus dem Gebiete der Planimetrie und Stereometrie.

Königbauer. Geometrische Aufgaben.

Bohnert. Elementare Stereometrie.

Schaeffer. 1440 Mathematische-Abiturienten-Aufgaben.

Андрэ. Упражненія въ геометріи.

Leyssenne et Cuir. Arithmetique. Exercices et Problèmes.

Bourlet. Corrigé des exercices et problèmes de géometrie dans l'espace.

Davison. Exercises from algebra for secondary schools.

Gorse. A School algebra course.

L'Éducation Mathématique 1907—1913.

ОГЛАВЛЕНІЕ.

Призмы и пирамиды.

Плоскость. Перпендикуляръ и наклонная къ плоскости. Проекціи прямыхъ и фигуръ на плоскость.

Плоскостью, какъ извѣстно, называется поверхность, съ которой совпадаетъ всѣми точками прямая, помѣщаемая на ней въ любомъ направленіи и имѣющая съ ней двѣ общія точки.

Положеніе плоскости въ пространствѣ вполнѣ опредѣляютъ слѣдующія условія:

1. Три точки, не лежащія на одной прямой линіи.
2. Прямая линія и точка, не совпадающая съ ней.
3. Двѣ прямыя линіи, пересѣкающіяся между собой.
4. Двѣ параллельныя прямыя линіи.

Прямыя, проведенныя внѣ плоскости, могутъ занимать относительно этой плоскости различныя положенія. Въ задачахъ этого отдѣла разсмотрѣны тѣ изъ положеній, при которыхъ прямая, или ея отрѣзокъ пересѣкаются съ плоскостью.

Прямая называется *перпендикуляромъ* къ плоскости, если она, пересѣкаясь съ этой плоскостью, образуетъ прямые углы со всѣми прямыми, проведенными на плоскости черезъ точку пересѣченія (и по крайней мѣрѣ съ двумя прямыми).

Прямая, пересѣкающаяся съ плоскостью, но не перпендикулярная къ ней, называется *наклонной*.

Проекціей точки на плоскость называется точка, въ которой пересѣкаетъ плоскость перпендикуляръ, опущенный на нее изъ этой точки; длину этого перпендикуляра принято считать за разстояніе точки отъ плоскости.

Проекціей отрѣзка прямой на плоскость называется отрѣзокъ прямой, соединяющій проекціи на плоскость концовъ даннаго отрѣзка.

Замѣчаніе. Проекція на плоскость прямой, перпендикулярной къ этой плоскости, есть точка.

Если изъ одной и той же точки пространства проведены къ плоскости перпендикуляръ и наклонная, то отрѣзокъ прямой, лежащей на плоскости и соединяющей основанія перпендикуляра и наклонной, называется *проекціей* наклонной на плоскость.

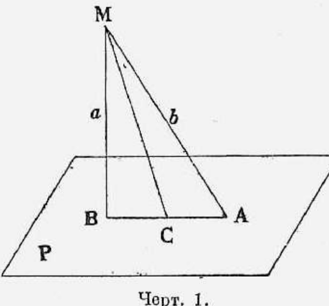
Изъ понятія проекціи ясно, что перпендикуляръ, наклонная и проекція этой наклонной на плоскость лежатъ въ одной плоскости и образуютъ прямоугольный треугольникъ, въ которомъ наклонная служитъ гипотенузой, а проекція наклонной и перпендикуляръ—катетами.

Точно такъ же отрѣзокъ прямой и его проекція на плоскость лежатъ въ одной плоскости, при чемъ проекція любой точки отрѣзка находится на проекціи самого отрѣзка.

Слѣдуетъ помнить, что рѣшеніе всякой стереометрической задачи сводится къ разсмотрѣнію и опредѣленію отрѣзковъ и иныхъ элементовъ фигуръ въ плоскости (при чемъ эта плоскость не обязательно горизонтальна, а можетъ быть расположена какъ угодно), т.-е. къ рѣшенію соотвѣтствующей планиметрической задачи.

Разсмотримъ здѣсь рѣшенія слѣдующихъ задачъ.

1. *Изъ точки* M, *находящейся отъ нѣкоторой плоскости на разстояніи* a, *проведена къ этой плоскости наклонная, равная* b. *Опредѣлить разстояніе средины проекціи этой наклонной отъ точки* M.



Черт. 1.

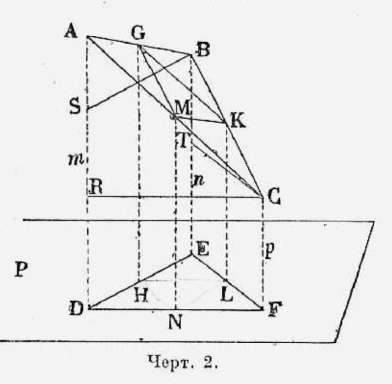
Пусть точка M отстоитъ отъ плоскости P на разстояніи $MB=a$ и пусть MA — данная наклонная, длина которой b.

Такъ какъ разстояніе точки отъ плоскости выражается длиной перпендикуляра, опущеннаго изъ этой точки на плоскость и такъ какъ перпендикуляръ къ плоскости образуетъ прямые углы со всѣми прямыми, проведенными въ плоскости черезъ основаніе этого перпендикуляра, то, соединивъ точки A и B прямой, найдемъ, что уголъ MBA будетъ прямымъ, а треугольникъ ABM — прямоугольнымъ, при чемъ отрѣзокъ BA представитъ собой проекцію наклонной MA на плоскость P.

Пусть точка C — средина проекціи BA, а MC — искомое разстояніе; для опредѣленія отрѣзка MC слѣдуетъ разсмотрѣть прямоугольный треугольникъ CBM, въ которомъ BM извѣстно, а BC можетъ быть выражено, какъ половина отрѣзка AB, который въ свою очередь опредѣлится изъ прямоугольнаго треугольника ABM. Слѣдуя указанному плану рѣшенія, вычислимъ сначала AB; получимъ: $AB=\sqrt{AM^2-BM^2}=\sqrt{b^2-a^2}$, послѣ чего найдемъ, что $BC=\frac{AB}{2}=\frac{1}{2}\sqrt{b^2-a^2}$ и, наконецъ, $MC=\sqrt{BM^2+BC^2}=$
$$=\sqrt{a^2+\frac{b^2-a^2}{4}}=\frac{1}{2}\sqrt{3a^2+b^2}.$$

2. *Вершины нѣкотораго треугольника* ABC *отстоятъ отъ данной плоскости* P *на разстояніяхъ, послѣдовательно равныхъ* m, n *и* p, *а проекція этого треугольника на данную плоскость представляетъ собой равносторонній треугольникъ со стороной* a. *Опредѣлить периметръ треугольника, вершины котораго лежатъ въ срединахъ сторонъ треугольника* ABC, *а также и разстоянія этихъ вершинъ отъ данной плоскости.*

Пусть ABC — данный треугольникъ, расположенный надъ плоскостью P. Опустивъ изъ его вершинъ перпендикуляры AD, BE и CF на плоскость P и соединивъ другъ съ другомъ точки D, E и F, получимъ треугольникъ DEF, представляющій собой проекцію треугольника ABC на плоскость P; треугольникъ DEF, по условію задачи, равносторонній, т.-е. въ немъ $DE=EF=DF=a$. Положивъ, что $m>n>p$, изъ условія задачи заключаемъ: $AD=m$, $BE=n$ и $CF=p$.



Черт. 2.

Пусть точки G, K и M будутъ средины сторонъ треугольника ABC, а точки H, L и N — соотвѣтственно проекціи ихъ на плоскость P. (Такъ какъ точки G, K и M лежатъ на сторонахъ треугольника ABC,

то проекціи H, L и N этихъ точекъ будутъ лежать на соотвѣтствующихъ проекціяхъ DE, EF и DF сторонъ того же треугольника. Соединивъ точки G, K и M послѣдовательно прямыми GK, KM и MG, получимъ треугольникъ GKM, въ которомъ, по условію задачи, надо опредѣлить периметръ и разстоянія GH, KL и MN вершинъ G, K и M отъ плоскости P. Чтобы знать периметръ треугольника GKM необходимо опредѣлить каждую изъ сторонъ этого треугольника, а для этого надо знать каждую изъ сторонъ треугольника ABC $\left(\text{такъ какъ } GK=\frac{AC}{2},\ KM=\frac{AB}{2} \text{ и } GM=\frac{BC}{2}\right)$. Для опредѣленія этихъ сторонъ, замѣтимъ, что четыреугольники $ACFD$, $ABED$ и $BCFE$ представляютъ собой трапеціи (такъ какъ $AD \perp DF$ и $CF \perp DF$, слѣдовательно AD параллельно CF и т. д.). Проведя въ плоскости трапеціи $ACFD$ прямую CR параллельно DF, въ плоскости $ABED$ прямую BS параллельно DE и въ плоскости $BCFE$ прямую CT параллельно EF, получимъ прямоугольные треугольники CKA, BSA и CTB; изъ треугольника CRA найдемъ: $CR=DF=a$, $AR=AD-RD=AD-CF=m-p$, а $AC=\sqrt{CR^2+AR^2}=\sqrt{a^2+(m-p)^2}$; такимъ же образомъ изъ треугольника BSA найдемъ, что $AB=\sqrt{a^2+(m-n)^2}$, а изъ треугольника CTB, что $BC=\sqrt{a^2+(n-p)^2}$. Такъ какъ периметръ треугольника GKM вдвое меньше периметра треугольника ABC, то $GK+KM+GM=\frac{1}{2}\left[\sqrt{a^2+(m-n)^2}+\sqrt{a^2+(m-p)^2}+\sqrt{a^2+(n-p)^2}\right]$.

Для опредѣленія разстояній вершинъ треугольника GKM отъ плоскости P, т.-е. для опредѣленія отрѣзковъ GH, KL и MN, разсмотримъ трапеціи $ACFD$, $ABED$ и $BCFE$.

Въ трапеціи $ACFD$ отрѣзокъ MN служитъ средней линіей (такъ какъ $MN \perp DF$, $AD \perp DF$ и $CF \perp DF$, то AD, MN и CF параллельны между собой; прямая MN, проходя чрезъ средину стороны AC, пройдетъ и чрезъ средину стороны DF); зная, что $AD=m$ и $CF=p$, имѣемъ $MN=\frac{m+p}{2}$. Точно такъ же изъ трапецій $ABED$ и $BCFE$ найдемъ, что $GH=\frac{m+n}{2}$ и $KL=\frac{n+p}{2}$.

1. Разстояніе точки A, находящейся внѣ плоскости, отъ точки B, лежащей на плоскости, равно $a=15$ дцм.; разстояніе точки B отъ основанія перпендикуляра, опущеннаго на плоскость изъ первой точки, равно $b=12$ дцм. Опредѣлить разстояніе точки A отъ плоскости.

2. Изъ центра окружности круга возставленъ перпендикуляръ къ плоскости этого круга; на этомъ перпендикулярѣ взята точка, разстояніе которой отъ центра окружности равно $d=12$ дм. Опредѣлить разстояніе этой точки отъ какой-либо точки окружности, если радіусъ окружности равенъ $r=16$ дм.

3. Точка лежитъ на разстояніи $a=12$ см. отъ плоскости; разстояніе этой же точки отъ ближайшей точки окружности, лежащей на данной плоскости, равно $b=13$ см., а разстояніе этой точки отъ центра окружности равно $c=15$ см. Опредѣлить длину радіуса этой окружности.

4. Изъ точки M плоскости возставленъ къ этой плоскости перпендикуляръ MN, равный $a=12$ см. Опредѣлить радіусы двухъ концентрическихъ окружностей, проведенныхъ въ данной плоскости изъ центра M, если извѣстно, что радіусъ одной изъ нихъ въ $p=13$ разъ больше радіуса другой, а разстояніе точки N отъ любой точки первой окружности въ $q=5$ разъ больше разстоянія точки N отъ любой точки второй окружности.

5. Разстояніе точки A отъ плоскости равно $a=12$ дюйм.; разстоянія этой же точки отъ точекъ B и C, лежащихъ въ плоскости, равны $b=37$ дюйм. и $c=13$ дюйм. Опредѣлить длину проекцій отрѣзковъ AB и BC на плоскость.

6. Изъ точки проведены къ плоскости перпендикуляръ $h=2$ дцм. и наклонная. Опредѣлить длину наклонной, если длина ея проекціи на плоскость на $m=1$ дцм. больше прямой, соединяющей основаніе перпендикуляра съ срединой наклонной.

7. Изъ точки M опущенъ перпендикуляръ MN на плоскость и черезъ основаніе этого перпендикуляра проведена прямая, лежащая въ плоскости; на этой прямой отъ точки N, по обѣ стороны, отложены равныя разстоянія NA и NB. Опредѣлить разстояніе точки отъ плоскости, если уголъ AMB — прямой и $AM=a=18$ см.

8. Разстоянія концовъ нѣкотораго отрѣзка отъ плоскости равны $a=5$ дцм. и $b=14$ дцм., а проекція этого отрѣзка на ту же плоскость равна $c=12$ дцм. Опредѣлить его длину.

9. Разстояніе MN точки M отъ плоскости равно $a=3$ дцм.; наклонныя MA и MB, проведенныя изъ этой точки къ плоскости, равны каждая $b=6$ дцм. Опредѣлить разстояніе AB, если проекціи этихъ наклонныхъ образуютъ между собой уголъ въ a) 180°, b) 120°, c) 90°, d) 60° и e) 30°.

10. Изъ внѣшней точки проведены къ плоскости двѣ наклонныя, длины которыхъ равны $a=13$ дцм. и $b=15$ дцм.; проекціи этихъ наклонныхъ на плоскость относятся между собой, какъ $m:n=5:9$. Опредѣлить разстояніе точки отъ плоскости.

11. Изъ точки M, лежащей внѣ плоскости, проведены къ этой плоскости наклонная $MA=a=21$ см. и перпендикуляръ $MB=b=14$ см. На MA взята точка N, отстоящая отъ точки M на разстояніи $n=9$ см. Опредѣлить разстояніе точки N отъ этой плоскости.

12. Отрѣзокъ MN прямой, длина котораго равна $a=15$ см. и концы котораго лежатъ по обѣ стороны плоскости, пересѣкается съ этой плоскостью въ точкѣ P такъ, что $MP:PN=m:n=2:3$, а сумма проекцій отрѣзковъ MP и PN на плоскость равна $p=9$ см. Опредѣлить разстоянія концовъ отрѣзка MN отъ плоскости.

13. Изъ точки N плоскости возставленъ къ этой плоскости перпендикуляръ, на которомъ взяты точки A и B такъ, что $AB=2{,}1$ см. Эти точки соединены съ нѣкоторой точкой M плоскости, при чемъ $AM=12$ см., а $BM=7{,}8$ см. Опредѣлить разстояніе MN.

14. Изъ точекъ M и N, лежащихъ въ плоскости, проведены къ этой плоскости равныя наклонныя MA и NB. Проекціи этихъ наклонныхъ на плоскость равны $a=5{,}2$ см. и $b=6$ см. Опредѣлить длину одной изъ этихъ наклонныхъ, если разность разстояній точекъ M и N отъ плоскости равна $m=1{,}4$ см.

15. Внѣ плоскости P по одну ея сторону расположены точки A, B и C, при чемъ разстояніе точки A отъ плоскости равно $a=14{,}4$ дцм.; разстояніе $AB=b=12$ дцм., а $AC=c=7{,}8$ дцм. Опредѣлить разстоянія точекъ B и C отъ плоскости, если извѣстно, что проекціи отрѣзковъ AB и AC на плоскость P одинаковы и равны $m=7{,}2$ дцм.

16. Разстоянія концовъ отрѣзка MN отъ нѣкоторой плоскости соотвѣтственно равны $a=15$ см. и $b=7$ см. Опредѣлить разстояніе средней точки этого отрѣзка отъ плоскости, если a) MN лежитъ по одну сторону плоскости, b) точки M и N лежатъ по обѣ стороны плоскости.

17. Изъ точки M, отстоящей отъ плоскости на разстояніи 12 см., проведены двѣ наклонныя $MA=15$ см. и $MB=13$ см. Отъ точки M по наклонной MA отложенъ отрѣзокъ $MC=10$ см., а по наклонной MB — отрѣзокъ $MD=10{,}4$ см. Точки C и D соединены между собою. Опредѣлить разстояніе средней точки отрѣзка CD отъ плоскости.

18. Меньшее основаніе трапеціи совпадаетъ съ нѣкоторой плоскостью, а большее находится отъ нея на разстояніи $a=10$ дцм.; отношеніе основаній этой трапеціи равно $m:n=3:5$. Опредѣлить разстояніе точки пересѣченія діагоналей этой трапеціи отъ данной плоскости.

19. На плоскости даны точки A, B и C, разстоянія между которыми одинаковы и равны $2\sqrt{3}$ см. Изъ точекъ A и B возставлены къ этой плоскости перпендикуляры $AM=20$ см. и $BN=5$ см. Точки M и B, такъ же, какъ и точки N и A попарно соединены прямыми, пересѣкающимися въ точкѣ D. Опредѣлить разстояніе DC.

20. Концы нѣкотораго отрѣзка прямой находятся отъ плоскости на разстояніяхъ, соотвѣтственно равныхъ $a=24$ см. и $b=10$ см. На какомъ разстояніи отъ той же плоскости находится точка, въ которой этотъ отрѣзокъ дѣлится на части въ отношеніи $m:n=5:2$?

21. Разстоянія вершинъ равносторонняго треугольника отъ нѣкоторой плоскости соотвѣтственно равны $a=15$ дцм., $b=10$ дцм. и $c=17$ дцм. Опредѣлить разстояніе центра окружности, вписанной въ этотъ треугольникъ, отъ той же плоскости.

22. Ромбъ расположенъ надъ нѣкоторой плоскостью такъ, что разстоянія трехъ изъ его вершинъ отъ этой плоскости послѣдовательно равны $a=4{,}5$ дцм., $b=2{,}5$ дцм. и $c=3{,}5$ дцм. Опредѣлить разстояніе четвертой вершины этого ромба отъ плоскости.

23. Разстоянія вершинъ треугольника отъ нѣкоторой плоскости соотвѣтственно равны $a=12$ дм., $b=15$ дм. и $c=19$ дм. Опредѣлить разстоянія срединъ сторонъ этого треугольника отъ той же плоскости.

24. Большая діагональ ромба, лежащаго внѣ плоскости, равна d, а концы меньшей одинаково удалены отъ плоскости. Проекція этого ромба на плоскость имѣетъ видъ квадрата со стороной a. Опредѣлить сторону ромба.

25. Равнобедренная трапеція $ABCD$ совпадаетъ большимъ основаніемъ AD, равнымъ 10 см. съ нѣкоторой плоскостью; меньшее основаніе этой трапеціи BC, равное 4 см., отстоитъ отъ плоскости на разстояніи равномъ 3 см. Опредѣлить периметръ четыреугольника, представляющаго собой проекцію данной трапеціи на плоскость, если извѣстно, что высота этой трапеціи равна 5 см.

26. Отрѣзокъ MN прямой, равный $b=10$ дюйм., пересѣкаетъ нѣкоторую плоскость въ точкѣ M, а точка N этого отрѣзка находится отъ плоскости на разстояніи NP, равномъ $a=8$ дюйм. Опредѣлить разстояніе точки P отъ отрѣзка MN.

27. Изъ вершины прямого угла равнобедреннаго прямоугольнаго треугольника возставленъ перпендикуляръ къ плоскости треугольника; на этомъ перпендикулярѣ взята точка, отстоящая на $a=5$ см. отъ вершины прямого угла и на $b=15$ см. отъ одного изъ концовъ гипотенузы. Опредѣлить длину гипотенузы.

28. Основаніе равнобедреннаго треугольника, равное 9 см., совпадаетъ съ плоскостью, а вершина его находится отъ этой плоскости на разстояніи $m=6$ см. Опредѣлить высоту этого треугольника, если извѣстно, что проекціи его боковыхъ сторонъ на плоскость перпендикулярны другъ къ другу.

29. Опредѣлить длину отрѣзка прямой, лежащаго внѣ плоскости, если разстоянія концовъ этого отрѣзка отъ плоскости соотвѣтственно равны $m=0{,}9$ ф. и $n=1{,}5$ ф., а проекція отрѣзка на плоскость равна $a=0{,}8$ ф.

30. На плоскости взятъ отрѣзокъ MN прямой; на разстояніи 10,5 вершк. отъ точки N на этомъ отрѣзкѣ взята точка A, изъ которой въ той же плоскости проведенъ къ MN перпендикуляръ $AB=6$ вершк., а изъ точки B возставленъ перпендикуляръ BC къ плоскости. Опредѣлить CN, если $BC=8$ вершк.

31. Къ плоскости квадрата изъ точки пересѣченія его діагоналей возставленъ перпендикуляръ. Опредѣлить длину стороны этого квадрата, если длина перпендикуляра равна $a=12$ дм., а разстояніе верхняго конца перпендикуляра отъ вершины квадрата равно $b=13$ дм.

32. Изъ вершины M прямоугольника $MNPQ$ возставленъ къ плоскости этого прямоугольника перпендикуляръ $MA=a=12$ дцм. и точка A соединена съ точками N, P и Q. Опредѣлить AP, если $AN=b=13$ дцм., а $AQ=c=12{,}5$ дцм.

33. Внѣ плоскости равносторонняго треугольника ABC взята точка M, отстоящая отъ вершины A треугольника на разстояніи $a=5$ дюйм., а отъ сторонъ AB и AC — на одинаковомъ разстояніи $b=4$ дюйм. Опредѣлить разстояніе точки M отъ плоскости треугольника ABC.

34. Изъ центра O окружности, описанной около равносторонняго треугольника ABC, возставленъ къ плоскости этого треугольника перпендикуляръ $OM=c=3{,}06$ м. Разстояніе точки M этого перпендикуляра отъ вершины B треугольника равно $MB=b=4{,}32$ м. Опредѣлить площадь треугольника ABC, а также и площадь треугольника, вершины котораго находятся въ точкахъ A, B и M.

35. Изъ вершины прямого угла, взятаго на плоскости, возставленъ къ этой плоскости перпендикуляръ. Нѣкоторая точка M, проекція которой лежитъ внутри прямого угла, отстоитъ отъ этого перпендикуляра на разстояніи $a=3$ м., а отъ сторонъ угла на разстояніяхъ, соотвѣтственно равныхъ $b=4$ м. и $c=5$ м. Опредѣлить разстояніе точки M отъ вершины прямого угла.

36. Изъ вершинъ A и B параллелограмма $ABCD$, діагонали котораго $d_1=0{,}42$ дцм. и $d_2=0{,}54$ дцм., возставлены равные перпендикуляры AM и BN, послѣ чего точки M и C, такъ же, какъ и точки N и D попарно соединены прямыми. Опредѣлить отрѣзки MC и ND, если $AB=a=0{,}4$ дцм., а разстояніе между точками M и D равно $b=0{,}6$ дцм.

37. Изъ вершинъ B и C треугольника ABC, въ которомъ $AB=BC=8$ см., а $AC=5$ см., возставлены къ плоскости этого треугольника перпендикуляры $BM=6$ см. и $CN=12$см. Опредѣлить площадь треугольника, вершины котораго находятся въ точкахъ A, M и N.

38. Изъ средины E стороны BC прямоугольника $ABCD$, въ которомъ $AB=6$ см. и $AD=8$ см., возставленъ къ плоскости этого треугольника перпендикуляръ $EF=12$ см. Опредѣлить разстояніе точки F отъ срединъ сторонъ прямоугольника.

39. Въ треугольникѣ ABC стороны $AB=4$ фут., $BC=15$ фут. и $AC=13$ фут.; изъ вершины A этого треугольника, внѣ его плоскости, проведена прямая такъ, что нѣкоторая ея точка M находится на равныхъ разстояніяхъ MK и MN отъ сторонъ AB и AC даннаго треугольника. Опредѣлить каждый изъ отрѣзковъ стороны BC, на которые дѣлитъ эту сторону проекція прямой AM.

40. Въ прямоугольномъ треугольникѣ ABC изъ вершины C прямого угла возставленъ къ плоскости треугольника перпендикуляръ CD, равный $a=4$ см. Разстояніе точки D этого перпендикуляра отъ гипотенузы равно $DE=b=5$ см., а разстояніе отъ точки D до средины F гипотенузы равно $DF=c=13$ см. Опредѣлить площадь треугольника CEF.

41. Разстояніе точки M, взятой внѣ плоскости P, отъ вершины B даннаго прямого угла ABC, лежащаго въ плоскости P, равно $MB=$ $=a=13$ дцм.; а разстоянія той же точки отъ сторонъ этого же угла одинаковы и равны $MD=ME=b=12$ дцм. Опредѣлить разстояніе точки M отъ плоскости прямого угла.

42. Стороны треугольника ABC соотвѣтственно равны $a=29$ см., $b=25$ см. и $c=6$ см. Надъ плоскостью треугольника взята точка M на разстояніи $h=20$ см. отъ этой плоскости и на равныхъ разстояніяхъ отъ вершинъ треугольника. Опредѣлить разстояніе точки M отъ вершинъ треугольника.

Прямая, проведенная на плоскости черезъ основаніе наклонной перпендикулярно къ ея проекціи, будетъ перпендикулярна и къ самой наклонной.

Эта теорема примѣняется при рѣшеніи задачъ №№ 43—45.

43. Изъ центра O окружности, радіусъ которой $OA=3$ см., возставленъ къ плоскости круга перпендикуляръ $OM=12$ см. Изъ точки N плоскости, въ которой лежитъ данная окружность, проведена къ этой окружности касательная $NB=4$ см. Опредѣлить длину наклонной MN.

44. Два треугольника BAC и BDC имѣютъ общую сторону $BC=9$ см., совпадающую съ нѣкоторой плоскостью; BE и CF — проекціи сторонъ $BA=12$ см. и $CD=10{,}2$ см. на эту плоскость — перпендикулярны къ сторонѣ BC. Опредѣлить стороны AC и BD этихъ треугольниковъ.

45. Стороны треугольника ABC послѣдовательно равны 6 см., 10,2 см. и 12,6 см. Изъ вершины C возставленъ перпендикуляръ $CD=9$ см. къ плоскости этого треугольника. Опредѣлить разстояніе точки D отъ стороны AB треугольника.

Прямыя, параллельныя между собою.

Главнѣйшія свойства параллельныхъ прямыхъ въ пространствѣ слѣдующія:

Если одна изъ двухъ параллельныхъ прямыхъ перпендикулярна къ плоскости, то и другая перпендикулярна къ этой же плоскости.

Двѣ прямыя, перпендикулярныя къ одной и той же плоскости, параллельны между собой.

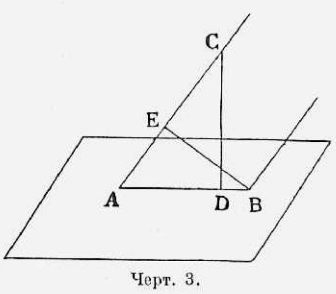
Двѣ прямыя, порознь параллельныя одной и той же третьей прямой, параллельны между собою.

Разсмотримъ здѣсь слѣдующую задачу.

Двѣ параллельныя прямыя пересѣкаютъ нѣкоторую плоскость въ точкахъ A и B такъ, что разстояніе AB равно **a**. *На одной изъ этихъ прямыхъ взята точка C, разстояніе которой отъ точки пересѣченія этой прямой съ плоскостью равно* **b**, *а разстояніе точки C*

отъ AB равно **c**. *Опредѣлить разстояніе между параллельными прямыми.*

Пусть двѣ параллельныя прямыя пересѣкаютъ плоскость въ точкахъ A и B (черт. 3.). На прямой, проходящей черезъ точку A, отложимъ отрѣзокъ AC, равный b; тогда, по условію задачи, CD будетъ равно c. Опустимъ изъ точки B перпендикуляръ BE на прямую AC; найдемъ, что его длина выразитъ собой искомое разстояніе между параллелями.



Черт. 3.

Изъ разсмотрѣнія подобныхъ между собой прямоугольныхъ треугольниковъ AEB и CDA (имѣющихъ общій уголъ A) найдемъ, что $EB:CD=BA:AC$, или, иначе, $EB:c=a:b$, откуда опредѣлимъ искомое разстояніе; получимъ: $EB=\frac{ac}{b}$.

46. Два неравныхъ отрѣзка прямой $a=20$ см. и $b=12$ см. проведены внѣ плоскости параллельно другъ другу черезъ двѣ точки плоскости, находящіяся на разстояніи $c=5$ см. другъ отъ друга. Опредѣлить разстояніе каждой изъ данныхъ точекъ отъ точки, въ которой пересѣкаетъ плоскость прямая, соединяющая свободные концы двухъ данныхъ отрѣзковъ.

47a. Разстояніе между двумя параллельными прямыми равно $a=11$см. Внѣ плоскости, въ которой лежатъ эти прямыя, взята точка, разстояніе которой отъ плоскости равно $b=24$ см., а отъ одной изъ параллельныхъ прямыхъ равно $c=25$ см. Опредѣлить разстояніе этой точки отъ другой параллели.

47b. Разстояніе между двумя параллельными прямыми въ пространствѣ равно a; нѣкоторая точка находится отъ первой изъ этихъ прямыхъ на разстояніи b, а отъ второй — на разстояніи c. Опредѣлить разстояніе этой точки отъ плоскости, въ которой лежатъ данныя параллельныя прямыя, если: 1) $a=4$ дюйм., $b=7$ дюйм., $c=11$ дюйм.; 2) $a=9$ вершк., $b=4$ вершк., $c=5$ вершк.; 3) $a=5$ см., $b=12$ см., $c=13$ см.; 4) $a=29$ дцм., $b=27$ дцм., $c=52$ дцм.

48. Двѣ параллельныя прямыя пересѣкаютъ нѣкоторую плоскость соотвѣтственно въ точкахъ A и B, которыя соединены между собой. На продолженіи прямой $AB=a=5$ см.,лежащей въ плоскости, взята точка C, на разстояніи $b=6$ см. отъ ближайшей параллели и на разстояніи $c=10$ см. отъ точки ея пересѣченія съ плоскостью. Опредѣлить разстояніе точки C отъ другой параллели.

49. Двѣ параллельныя прямыя, разстояніе между которыми $a=4$ дюйм., пересѣкаютъ нѣкоторую плоскость въ точкахъ A и B такъ, что разстояніе $AB=b=5$ дюйм. Изъ точки пересѣченія одной изъ прямыхъ съ плоскостью опущенъ перпендикуляръ на другую прямую, которую этотъ перпендикуляръ пересѣкаетъ въ точкѣ C. Опредѣлить разстояніе точки C отъ отрѣзка AB.

50. Одна изъ трехъ параллельныхъ прямыхъ перпендикулярна къ нѣкоторой плоскости; разстоянія между прямыми соотвѣтственно равны 6 см., 8 см. и 10 см. Отъ точекъ пересѣченія съ плоскостью прямыхъ, наиболѣе удаленныхъ другъ отъ друга, отложены по этимъ прямымъ отрѣзки, каждый изъ которыхъ равенъ 14 см., и полученныя точки A и B соединены другъ съ другомъ. Опредѣлить разстояніе прямой AB отъ точки пересѣченія съ плоскостью третьей прямой.

Прямыя, параллельныя плоскости.

Прямая и плоскость называются параллельными, если при продолженіи онѣ не встрѣчаются.

Изъ этого понятія возможно сдѣлать слѣдующіе выводы:

Прямая и плоскость, перпендикулярныя къ одной и той же прямой, параллельны между собой.

Прямая, параллельная прямой, лежащей въ плоскости, будетъ параллельна самой плоскости.

Если плоскость проходитъ черезъ прямую, параллельную другой плоскости, то эти плоскости пересѣкаются по прямой, параллельной данной прямой.

Прямая, параллельная каждой изъ двухъ пересѣкающихся плоскостей, будетъ параллельна и прямой, по которой эти плоскости между собою пересѣкаются.

Прямая, параллельная плоскости, на всемъ протяженіи одинаково удалена отъ этой плоскости.

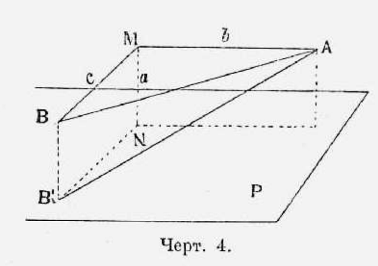
Замѣчаніе. Проекція отрѣзка прямой на плоскость, параллельную этой прямой, равна по длинѣ самому отрѣзку.

Рѣшимъ слѣдующую задачу.

Черезъ точку M, отстоящую отъ плоскости P на разстояніи $\mathbf{a}$, *проведены параллельно этой плоскости двѣ взаимно-перпендикулярныя прямыя; отъ точки M, на одной изъ этихъ прямыхъ, отложенъ отрѣзокъ MA, равный* $\mathbf{b}$, *а на другой — отрѣзокъ MB, равный* $\mathbf{c}$. *Опредѣлить разстояніе точки A отъ проекціи точки B на плоскость P.*

Выполнивъ чертежъ согласно условію задачи, положимъ, что $MN=a$, $MA=b$, $BM=c$ и что точка B_1 есть проекція точки B на плоскость P.

Для опредѣленія искомаго разстоянія AB_1 слѣдуетъ разсмотрѣть прямоугольный треугольникъ B_1BA, въ которомъ $BB_1=MN=a$, а BA опредѣлится изъ прямоугольнаго треугольника BMA по теоремѣ Пиѳагора въ видѣ: $BA=\sqrt{AM^2+BM^2}=\sqrt{b^2+c^2}$; слѣдовательно,



Черт. 4.

$$B_1A=\sqrt{B_1B^2+BA^2}=\sqrt{a^2+b^2+c^2}.$$

51a. Изъ точки M, лежащей внѣ плоскости, опущенъ на эту плоскость перпендикуляръ MP и проведена параллельно плоскости прямая MN, на которой отложенъ отъ точки M отрѣзокъ $MQ=a=35$ дм. Опредѣлить разстояніе PQ, если $MP=b=12$ дм.

51b. Изъ точки M отрѣзка AB прямой, лежащаго въ плоскости, возставленъ перпендикуляръ MN къ этому отрѣзку (но не къ плоскости), а черезъ точку N этого перпендикуляра проведена прямая NP, параллельная данной плоскости. Опредѣлить длину проекціи MP на плоскость, если $MN=a=24$ см., $NP=b=7$ см., а разстояніе точки P отъ плоскости равно $c=15$ см.

52. Изъ точки M, лежащей внѣ плоскости, проведены къ этой плоскости двѣ наклонныя MA и MB; на первой изъ нихъ взята точка N, изъ которой проведена прямая параллельно данной плоскости до пересѣченія съ наклонной MB въ точкѣ C. Опредѣлить NC, если $AB=27$ см., а точка N дѣлитъ MA въ отношеніи $2:7$.

53. Изъ точки A, лежащей внѣ плоскости, опущенъ перпендикуляръ AM на отрѣзокъ BC прямой, параллельной плоскости; этотъ

перпендикуляръ продолженъ до пересѣченія съ плоскостью въ точкѣ N. Точка A соединена съ точками B и C, и прямыя AB и AC продолжены до пересѣченія съ плоскостью въ точкахъ D и E. Опредѣлить разстояніе DE, если AM, BC и MN соотвѣтственно равны $a=26$ м., $b=19{,}5$ м. и $c=7$ м.

54. Три параллельныя прямыя, не лежащія въ одной плоскости, находятся другъ отъ друга на разстояніяхъ $a = 13$ см., $b = 14$ см. и $c=15$ см. Черезъ двѣ ближайшія другъ къ другу прямыя проведена плоскость. Опредѣлить разстояніе этой плоскости отъ третьей прямой.

55. Прямыя AB, CD и EF параллельны между собой, причемъ CD параллельна нѣкоторой плоскости P. Разстояніе AB отъ CD равно $a=37$ см., разстояніе AB отъ EF равно $b=15$ см., а разстояніе CD отъ EF равно $c=44$ см.; CD и EF находятся отъ P на одинаковомъ разстояніи, равномъ $d=15$ см. Опредѣлить разстояніе AB отъ плоскости P.

Параллельныя плоскости.

Плоскости называются параллельными, если онѣ не пересѣкаются, сколько бы ихъ ни продолжали.

Плоскости будутъ параллельными, если онѣ перпендикулярны къ одной и той же прямой, а также если двѣ пересѣкающіяся прямыя одной плоскости порознь параллельны двумъ пересѣкающимся прямымъ другой.

Свойства параллельныхъ плоскостей слѣдующія:

1. Если двѣ параллельныя плоскости пересѣкаются съ третьей плоскостью, то линіи пересѣченія параллельны.

2. Если прямая или плоскость пересѣкаютъ одну изъ параллельныхъ плоскостей, то онѣ пересѣкутъ и другую.

3. Если прямая перпендикулярна къ одной изъ параллельныхъ плоскостей, то она перпендикулярна и къ другой.

4. Черезъ всякую точку пространства можно провести плоскость, параллельную данной плоскости и притомъ только одну.

5. Отрѣзки параллельныхъ прямыхъ, заключенные между параллельными плоскостями, равны между собою.

6. Если два угла лежатъ въ разныхъ плоскостяхъ и стороны этихъ угловъ соотвѣтственно параллельны и одинаково направлены, то такіе углы равны, а плоскости параллельны.

7. Прямыя, пересѣченныя рядомъ параллельныхъ плоскостей, разсѣкаются ими на пропорціональныя части.

При рѣшеніи нижеприводимыхъ задачъ слѣдуетъ пользоваться главнымъ образомъ теоремами о подобныхъ треугольникахъ и теоремой Пиѳагора.

56. Когда прямой уголъ проектируется на плоскость 1) прямымъ угломъ, 2) тупымъ угломъ, 3) острымъ угломъ?

57. Точка M находится надъ двумя параллельными другъ другу плоскостями P и Q, разстояніе между которыми $a=7$ дюйм., при чемъ эта точка удалена отъ ближайшей плоскости P на разстояніе $b=3$ дюйм. Черезъ точку M проведены двѣ прямыя, пересѣкающія плоскость Q въ точкахъ A и B, отстоящихъ другъ отъ друга на разстояніи $c=13$ дюйм. Опредѣлить разстояніе между точками пересѣченія этихъ прямыхъ съ плоскостью P.

58. Три параллельныя плоскости P, Q и R пересѣкаются двумя прямыми линіями, одной въ точкахъ A, B и C, а другой соотвѣтственно въ точкахъ D, E и F. Опредѣлить отрѣзки DE и EF, если $AB=6$ саж., $BC=8$ саж. и $DF=21$ саж.

59. Отрѣзки двухъ прямыхъ, заключенные между параллельными плоскостями, равны $a=13$ дцм. и $b=15$ дцм. Длина проекціи меньшаго отрѣзка (a) на одну изъ плоскостей равна $c=5$ дцм. Опредѣлить длину проекціи бо́льшаго отрѣзка.

60. Три параллельныя между собой плоскости P, Q и R (плоскость Q между P и R) пересѣчены двумя прямыми линіями. Отрѣзки прямыхъ, заключенные между плоскостями P и Q, равны соотвѣтственно $a=6$ дюйм. и $b=10$ дюйм. Отрѣзокъ первой прямой, заключенный между плоскостями Q и R, равенъ отрѣзку второй прямой, заключенному между плоскостями P и Q. Опредѣлить разстояніе между плоскостями Q и R, если разстояніе между P и Q равно $c=5$ дюйм.

61. Разстояніе между двумя параллельными плоскостями P и Q равно $a=8$ см. Изъ точки A, лежащей надъ данными плоскостями на разстояніи $b=12$ см. отъ ближайшей плоскости P, проведена прямая, пересѣкающая плоскости P и Q соотвѣтственно въ точкахъ B и C. Опредѣлить длины отрѣзковъ AB и BC, если длина отрѣзка AC равна $c=45$ см.

62. Отрѣзокъ AB прямой, равный $a=4$ см., находится надъ двумя параллельными плоскостями P и Q и параллеленъ имъ. Изъ точекъ A и B отрѣзка опущены перпендикуляры $AC=b=7$ см. на пло-

скость P и $BD=c=10$ см. на плоскость Q. Точки C и D соединены другъ съ другомъ. Опредѣлить отрѣзокъ CD и разстояніе отъ его средины до точки B отрѣзка AB прямой.

63. Отрѣзки двухъ прямыхъ, заключенные между параллельными плоскостями, равны $a=17$ см. и $b=25$ см., а длины проекцій ихъ на одну изъ параллельныхъ плоскостей соотвѣтственно относятся, какъ $m:n=2:5$. Опредѣлить разстояніе между параллельными плоскостями.

64. Плоскости P и Q параллельны. На плоскости P взяты точки A и B, изъ которыхъ проведены до пересѣченія съ плоскостью Q прямыя $AC=a=13$ дцм. и $BD=b=15$ дцм. Сумма проекцій отрѣзковъ AC и BD на одну изъ плоскостей равна $d=14$ дцм. Опредѣлить эти проекціи и разстояніе между плоскостями.

65. Въ пространствѣ расположены два прямыхъ угла такъ, что стороны ихъ соотвѣтственно параллельны, одинаково направлены и перпендикулярны къ прямой, соединяющей вершины этихъ угловъ и равной $a=12$ см. На одной изъ сторонъ одного угла отъ его вершины отложенъ отрѣзокъ $b=9$ см., а на непараллельной ей сторонѣ другого угла — отрѣзокъ $c=8$ см. Опредѣлить разстояніе между концами этихъ отрѣзковъ.

66. Въ предыдущей задачѣ замѣнить прямые углы углами въ $30°$ и взять $a=10$ см., $b=8$ см. и $c=6$ см.

67. На одной изъ двухъ параллельныхъ плоскостей взята точка A, а на другой — точка B. Разстояніе между точками A и B равно $a=10$ дюйм., а разстояніе между плоскостями равно $b=8$ дюйм. Черезъ прямую AB и ея проекцію на одну изъ параллельныхъ плоскостей, проведена плоскость, въ которой лежитъ перпендикуляръ, возставленный къ отрѣзку AB изъ его средины C. Этотъ перпендикуляръ пересѣкаетъ параллельную плоскость въ точкѣ D. Опредѣлить длину отрѣзка CD.

68. Плоскости P и Q параллельны. Изъ точки A плоскости P проведена прямая, пересѣкающая плоскость Q въ точкѣ B такъ, что отрѣзокъ AB равенъ a, а проекція его на плоскость равна $BC=b$. Изъ точки B проведена биссектрисса угла ABC, пересѣкающая плоскость P въ точкѣ D. Опредѣлить проекцію отрѣзка BD на одну изъ параллельныхъ плоскостей.

69. Разстояніе между двумя параллельными плоскостями P и Q равно $a=8$ фут. Между этими плоскостями расположенъ равносторонній треугольникъ ABC, со стороной $b=10$ фут., такъ, что вершина A лежитъ въ плоскости P, вершина B въ плоскости Q, а вершина C отстоитъ на одинаковомъ разстояніи отъ той и другой плоскости. Опредѣлить видъ и периметръ треугольника, представляющаго собой проекцію даннаго треугольника ABC на одну изъ плоскостей.

70. Плоскости P и Q параллельны. Въ плоскости P взятъ треугольникъ ABC, площадь котораго K. Изъ точки O, находящейся надъ плоскостями, проведены прямыя OA, OB и OC, пересѣкающія плоскость Q въ точкахъ A_1, B_1 и C_1. Опредѣлить площадь треугольника $A_1B_1C_1$, если $AO:A_1O=m:n$.

71. Плоскости P и Q параллельны. На плоскости P взяты точки A и B, на разстояніи $a=13$ дюйм. другъ отъ друга. Изъ точки A опущенъ перпендикуляръ AC на плоскость Q, а изъ точки B проведена наклонная, пересѣкающая плоскость Q въ точкѣ D такъ, что проекція этой наклонной на плоскость Q перпендикулярна къ прямой, проходящей черезъ точки C и D. Опредѣлить длину наклонной BD, если извѣстно, что разстояніе между плоскостями равно $b=9$ дюйм., а разстояніе между точками C и D плоскости Q равно $c=5$ дюйм.

72. Параллельныя плоскости P и Q, разстояніе между которыми $a=20$ см., пересѣкаются плоскостью R по прямымъ AB и CD. Точка M, лежащая въ плоскости P, отстоитъ отъ AB на разстояніи $b=10$ см., и отъ CD — на разстояніи $c=25$ см. Опредѣлить разстояніе точки M отъ плоскости R (отрѣзки b и c образуютъ между собой острый уголъ).

73. Двѣ параллельныя плоскости P и Q, разстояніе между которыми $a=8$ вершк., пересѣкаются плоскостью R по прямымъ AB и CD, а плоскостью S, параллельной плоскости R и отстоящей отъ нея на разстояніи $b=4$ вершк., соотвѣтственно по прямымъ EF и GH. Разстояніе между прямыми AB и EF равно $c=6$ вершк. Опредѣлить разстояніе между AB и CD.

Уголъ прямой съ плоскостью.

Угломъ прямой съ плоскостью (въ томъ случаѣ, когда прямая наклонна къ плоскости), какъ извѣстно, называется уголъ, составленный этой прямой съ ея проекціей на плоскость. *Этотъ уголъ является наименьшимъ изъ всѣхъ угловъ, которые наклонная образуетъ съ прямыми, проведенными на плоскости черезъ основаніе наклонной.*

Рѣшеніе нижеприводимыхъ задачъ сводится къ разсмотрѣнію прямоугольнаго треугольника, одинъ изъ острыхъ угловъ котораго равенъ 30°, 45°, 60°, 18° и т. п., при чемъ величина угла обыкновенно задается такъ, что одинъ изъ катетовъ разсматриваемаго прямоугольнаго треугольника можетъ быть вычисленъ, какъ половина стороны правильнаго многоугольника, вписаннаго въ окружность, радіусъ которой равенъ гипотенузѣ этого треугольника.

74. Точка M отстоитъ отъ плоскости P на $a=10$ см. Опредѣлить длину наклонной, проведенной изъ точки M къ плоскости P подъ угломъ 1) въ 30°, 2) въ 60°, 3) въ 45° и 4) въ 18°.

74a. Двѣ параллельныя плоскости, отстоящія другъ отъ друга на разстояніи $m=6$ дцм., пересѣкаются тремя прямыми — одной подъ угломъ въ 30°, другой подъ угломъ въ 45°, а третьей подъ угломъ въ 60°. Опредѣлить длины отрѣзковъ прямыхъ, заключенныхъ между плоскостями.

75. Изъ точки внѣ плоскости проведена къ этой плоскости наклонная, длина которой $a=5$ дцм. Опредѣлить разстояніе точки отъ плоскости, если наклонная пересѣкаетъ плоскость подъ угломъ въ 30°; 45°; 60°.

76. Продолженіе отрѣзка AB прямой пересѣкаетъ нѣкоторую плоскость подъ угломъ въ 30°. Проекція отрѣзка AB на ту же плоскость равна $a=4\sqrt{3}$ см. Опредѣлить длину отрѣзка AB.

77. Отрѣзокъ AB прямой параллеленъ плоскости P и равенъ a. Прямая, соединяющая точку A отрѣзка съ проекціей точки B на плоскость P, образуетъ съ этой плоскостью уголъ въ 72°. Опредѣлить разстояніе отрѣзка AB прямой отъ плоскости P.

78. На плоскости P отмѣчены двѣ точки A и B, а на плоскости Q, ей параллельной, — точки C и D. Прямая, проходящая черезъ точки A и C, образуетъ съ одной изъ плоскостей уголъ въ 30°, а прямая, проходящая черезъ точки B и D — уголъ въ 45°. Опредѣлить длину отрѣзка BD, если отрѣзокъ AC равенъ $a=10$ дм.

79. Изъ точки A плоскости P проведена прямая AB подъ угломъ въ 45° къ плоскости, а въ плоскости P черезъ ту же точку A проведена прямая AC подъ угломъ въ 45° къ проекціи прямой AB. Опредѣлить уголъ между прямыми AB и AC.

80. Изъ точки M, отстоящей отъ плоскости P на разстояніе a, проведены двѣ наклонныя — одна подъ угломъ въ 30°, а другая подъ угломъ въ 45°. Опредѣлить разстояніе между основаніями этихъ наклонныхъ, если ихъ проекціи образуютъ между собой уголъ въ 60°.

81. Изъ точки A плоскости P проведена прямая AM подъ угломъ въ 30° къ плоскости, и прямая AN подъ угломъ въ 45° къ той же плоскости. На прямыхъ AM и AN, образующихъ между собой уголъ, равный 60°, отложены отъ точки A равные отрѣзки $AB=AC=a=10$ вершк. и точки B и C соединены другъ съ другомъ. Опредѣлить проекцію отрѣзка BC на плоскость P.

82. Изъ точки M, отстоящей отъ плоскости P на разстояніи a, опущенъ на эту плоскость перпендикуляръ MA и черезъ точку A проведена прямая въ плоскости P. Изъ точки B этой прямой, отстоящей отъ A на разстояніи b, возставленъ къ ней перпендикуляръ BC, равный c и образующій уголъ въ 45° съ плоскостью P. Опредѣлить разстояніе между точками M и C.

83. Изъ точки A, отстоящей отъ плоскости P на разстояніи m, проведены къ этой плоскости двѣ наклонныя AB и AC такъ, что уголъ, образуемый одной изъ нихъ съ плоскостью, вдвое болѣе угла, образуемаго другой. Опредѣлить длину большей наклонной, если длина меньшей равна a.

84. Разстояніе отрѣзка MN прямой отъ плоскости, ей параллельной, равно $a=5$ дюйм., а разстояніе точки A, лежащей въ плоскости, отъ отрѣзка MN равно $b=6$ дюйм. Прямыя AM и AN образуютъ съ плоскостью углы, соотвѣтственно равные 30° и 45°. Опредѣлить длину отрѣзка MN и выяснить условія возможности задачи.

85. Равносторонній треугольникъ ABC со стороною a лежитъ въ плоскости P. Изъ вершинъ A и B этого треугольника возставлены къ той же плоскости перпендикуляры AM и BN, каждый изъ которыхъ равенъ $2a$. Изъ точки M проведена наклонная MD подъ угломъ въ 30° къ плоскости P, а изъ точки N — наклонная NE подъ угломъ въ 45° къ той же плоскости, при чемъ обѣ наклонныя пересѣкаютъ перпендикуляръ, возставленный къ плоскости P изъ вершины C даннаго треугольника, соотвѣтственно въ точкахъ F и G. Опредѣлить длину отрѣзка FG.

Двугранные углы.

Двѣ пересѣкающіяся плоскости образуютъ, какъ извѣстно, *двугранный уголъ;* плоскости, образующія этотъ уголъ, называются его *сторонами* или *гранями*, а линія пересѣченія плоскостей — *ребромъ* двуграннаго угла.

Если изъ произвольной точки ребра провести на каждой грани его по перпендикуляру къ этому ребру, то образованный этими перпендикулярами уголъ называется *линейнымъ угломъ* даннаго двуграннаго угла.

Замѣчаніе. Плоскость, перпендикулярная къ ребру двуграннаго угла, пересѣкается съ его гранями по прямымъ, образующимъ между собой уголъ, который будетъ также *линейнымъ угломъ* даннаго двуграннаго угла.

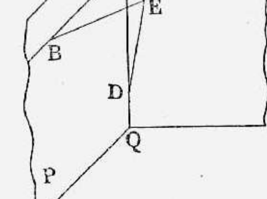
Двугранные углы измѣряются ихъ линейными углами.

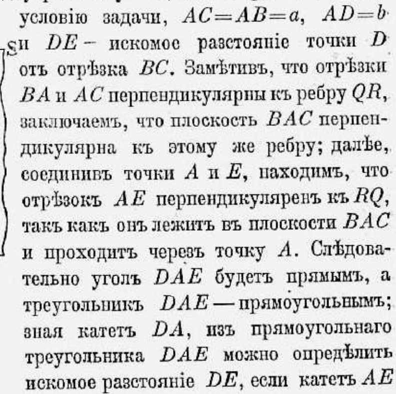
Если двѣ плоскости пересѣкаются между собой такъ, что образуютъ равные смежные двугранные углы, то такія плоскости называются *взаимно-перпендикулярными*, а образуемые ими двугранные углы — *прямыми*. Прямымъ двуграннымъ угламъ соотвѣтствуютъ и прямые линейные углы.

Рѣшимъ слѣдующую задачу.

На ребрѣ двуграннаго угла, линейный уголъ котораго равенъ 120°, взята точка A. Изъ этой точки въ плоскости каждой изъ граней даннаго угла возставлены къ ребру перпендикуляры, на которыхъ отъ точки A отложены отрѣзки AB и AC такъ, что $AB=AC=a$. Отъ той же точки A по ребру двуграннаго угла отложенъ отрѣзокъ AD, равный b. Опредѣлить разстояніе точки D отъ прямой, соединяющей концы отрѣзковъ AC и AB.

Пусть $PQRS$ — данный двугранный уголъ, въ которомъ, согласно условію задачи, $AC=AB=a$, $AD=b$ и DE — искомое разстояніе точки D отъ отрѣзка BC. Замѣтивъ, что отрѣзки BA и AC перпендикулярны къ ребру QR, заключаемъ, что плоскость BAC перпендикулярна къ этому же ребру; далѣе, соединивъ точки A и E, находимъ, что отрѣзокъ AE перпендикуляренъ къ RQ, такъ какъ онъ лежитъ въ плоскости BAC и проходитъ черезъ точку A. Слѣдовательно уголъ DAE будетъ прямымъ, а треугольникъ DAE — прямоугольнымъ; зная катетъ DA, изъ прямоугольнаго треугольника DAE можно опредѣлить искомое разстояніе DE, если катетъ AE будетъ извѣстенъ. Замѣтивъ, что точка D равно-удалена отъ точекъ





Черт. 5.

B и C и зная, что DE перпендикулярна BC, заключаемъ, что BE равно EC; слѣдовательно, въ равнобедренномъ треугольникѣ BAC прямая AE является медіаной, биссектриссой и высотой, вслѣдствіе чего треугольникъ AEC будетъ прямоугольнымъ, при чемъ уголъ EAC, составляя половину угла BAC, равенъ 60°, а уголъ ACE равенъ 30°; поэтому $AE=\frac{AC}{2}=\frac{a}{2}$. Слѣдовательно,

$$DE=\sqrt{DA^2+AE^2}=\sqrt{b^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{4b^2+a^2}\ .$$

86. Параллелограммъ проектируется на одну грань двуграннаго угла въ натуральную величину, а на другую — въ видѣ отрѣзка прямой. Опредѣлить линейный уголъ двуграннаго угла.

87. Изъ точки, лежащей внутри двуграннаго угла, опущены перпендикуляры на стороны этого угла. Опредѣлить линейный уголъ двуграннаго угла, если уголъ между перпендикулярами равенъ a) 30°, b) 45°, c) 60°, d) 110° 20′, e) 142° 18′ 16″.

88. Между двумя взаимно-перпендикулярными плоскостями взята точка M, отстоящая на $a=6$ дюйм. отъ одной плоскости и на $b=8$ дюйм. отъ другой. Опредѣлить разстояніе точки M отъ линіи пересѣченія плоскостей.

89. Точка A, лежащая внутри двуграннаго угла, равно-удалена отъ сторонъ этого угла. Опредѣлить разстояніе этой точки отъ ребра угла, если уголъ между перпендикулярами, опущенными изъ A на стороны двуграннаго угла, равенъ 60°, а длина одного изъ этихъ перпендикуляровъ $b=12$ см.

90. Проекція отрѣзка AB прямой на одну изъ граней двуграннаго угла перпендикулярна къ его ребру. Какой уголъ съ ребромъ составляетъ проекція того же отрѣзка на другую грань двуграннаго угла?

91. На одной изъ двухъ пересѣкающихся плоскостей взята точка M, отстоящая отъ линіи пересѣченія плоскостей на разстояніи вдвое большемъ, чѣмъ отъ другой плоскости. Опредѣлить уголъ между плоскостями.

92. Прямая, перпендикулярная къ ребру двуграннаго угла, образуетъ съ одной изъ его граней уголъ въ 30°, а съ другой — уголъ въ 45°. Опредѣлить отношеніе перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ какой-либо точки этой прямой на плоскости граней двуграннаго угла.

93. На одной изъ граней двуграннаго угла взяты двѣ точки A и B, отстоящія отъ ребра двуграннаго угла соотвѣтственно на разстояніяхъ

a=5 см. и b=8 см. Опредѣлить разстояніе точки A отъ другой грани двуграннаго угла, если разстояніе точки B отъ этой грани равно c=4 см.

94. Прямая, пересѣкающая грани прямого двуграннаго угла въ точкахъ A и B, образуетъ съ одной изъ нихъ уголъ въ 45°, а съ другой — уголъ въ 30°. Опредѣлить отрѣзокъ ребра двуграннаго угла, заключенный между перпендикулярами, опущенными на него изъ точекъ A и B, если длина отрѣзка $AB=a$=10 метр.

95. На одной изъ граней прямого двуграннаго угла взята точка A, отстоящая отъ ребра этого угла на разстояніи a=15 дюйм., на другой грани этого двуграннаго угла взята точка B, отстоящая отъ ребра на разстояніи b=16,5 дюйм. Разстояніе между проекціями этихъ точекъ на ребро двуграннаго угла равно c=3 дюйм. Опредѣлить разстояніе между точками A и B.

96. Линейный уголъ двуграннаго угла равенъ 45°. Изъ точки A, взятой на одной изъ граней этого угла и отстоящей отъ другой грани на a=4 см., проведена прямая, пересѣкающая въ точкѣ B подъ угломъ въ 45° ребро двуграннаго угла. Опредѣлить длину отрѣзка AB.

97. Линейный уголъ двуграннаго угла равенъ 75°. Внутри двуграннаго угла взята точка M, отстоящая отъ одной изъ граней на разстояніи a=8 см., а отъ другой — вдвое меньшемъ, чѣмъ отъ ребра этого угла. Опредѣлить разстояніе точки M отъ ребра двуграннаго угла.

98. Линейный уголъ двуграннаго угла равенъ 45°. На одной изъ граней двуграннаго угла взята точка A на разстояніи a=4 фут. отъ его ребра. Разстояніе нѣкоторой точки B, лежащей на ребрѣ угла, до точки A равно b=9 фут. Опредѣлить проекцію прямой AB на другую грань двуграннаго угла.

99. На ребрѣ двуграннаго угла, линейный уголъ котораго равенъ 60°, взята точка A, изъ которой возставленъ перпендикуляръ AC, лежащій въ плоскости одной изъ граней двуграннаго угла и перпендикуляръ AN, лежащій въ плоскости другой грани этого угла. На этихъ перпендикулярахъ отъ точки A отложены отрѣзки AB и AC, каждый изъ которыхъ равенъ a. Точки B и C соединены другъ съ другомъ; средина D отрѣзка BC соединена съ нѣкоторой точкой E, лежащей на ребрѣ двуграннаго угла, при чемъ образовавшійся отрѣзокъ $DE=b$. Опредѣлить разстояніе концовъ отрѣзка BC отъ точки E.

100. На ребрѣ двуграннаго угла, линейный уголъ котораго равенъ 60°, отложенъ отрѣзокъ $MN=a$. Изъ точки M къ ребру двуграннаго угла возставленъ перпендикуляръ, лежащій въ плоскости одной изъ граней двуграннаго угла, а изъ точки N къ тому же ребру возставленъ перпендикуляръ, лежащій въ плоскости другой грани этого угла. По этимъ перпендикулярамъ отъ точекъ M и N отложены отрѣзки MA и NB, каждый изъ которыхъ равенъ b, послѣ чего точки A и B соединены другъ съ другомъ. Опредѣлить длину отрѣзка AB.

101. Ребро двуграннаго угла, линейный уголъ котораго равенъ 30°, служитъ діаметромъ полуокружности, проведенной въ одной изъ граней этого угла. Изъ точки полуокружности, отстоящей отъ одного изъ концовъ діаметра на разстояніи a=4 дюйм., опущенъ перпендикуляръ на другую грань угла. Опредѣлить разстояніе отъ основанія опущеннаго перпендикуляра до ребра двуграннаго угла, если діаметръ полуокружности равенъ b=5 дюйм.

102. На одной изъ граней нѣкотораго двуграннаго угла взята точка A, а на другой — точка B; длина отрѣзка AB прямой, проходящей черезъ точки A и B, равна c=48 дюйм., а разстояніе точекъ A и B отъ нѣкоторой точки C, взятой на ребрѣ двуграннаго угла, равны соотвѣтственно a=35 дюйм. и b=29 дюйм. Опредѣлить разстояніе отрѣзка AB отъ точки C.

103. Два равныхъ прямоугольника $ABCD$ и ABC_1D_1 имѣютъ общую сторону AB, а плоскости этихъ прямоугольниковъ составляютъ между собой уголъ въ 45°. Опредѣлить отношеніе площадей частей, на которыя дѣлится прямоугольникъ ABC_1D_1 проекціей стороны CD другого прямоугольника.

104. Одна изъ сторонъ параллелограмма, площадь котораго s= 48 кв. дюйм., лежитъ въ плоскости P, а плоскость параллелограмма образуетъ съ плоскостью P уголъ въ 30°. Опредѣлить площадь четыреугольника, представляющаго проекцію даннаго параллелограмма на плоскость P.

Трегранные и многогранные углы.

Если нѣсколько плоскостей пересѣкаются послѣдовательно по прямымъ линіямъ, сходящимся въ общей точкѣ, то эти плоскости образуютъ *многогранный* уголъ. Точка, въ которой сходятся линіи пересѣченія плоскостей, называется *вершиной* многограннаго угла,

линіи пересѣченія плоскостей — его *ребрами*, плоскости, образующія уголъ — его *гранями*, а углы, образуемые двумя смежными ребрами, *плоскими* углами многограннаго угла.

Замѣчаніе. Слѣдуетъ имѣть въ виду, что ребра и грани многограннаго угла могутъ быть продолжены безгранично.

Наименьшее число граней въ многогранномъ углѣ равно тремъ; такой уголъ называется *трегранными*. Многогранный уголъ, составленный изъ четырехъ граней, называется четырегранныимъ угломъ, составленный изъ пяти граней—пятиграннымъ и т. д.

Во всякомъ трегранномъ углѣ каждый плоскій уголъ меньше суммы двухъ другихъ плоскихъ угловъ.

Во всякомъ выпукломъ многогранномъ углѣ сумма плоскихъ угловъ меньше $4d$.

105. Три прямыя выходятъ изъ одной общей точки. Лежатъ ли эти прямыя въ одной плоскости, если извѣстно, что онѣ образуютъ другъ съ другомъ углы, равные послѣдовательно 1) 123° 15′; 114°30′ и 122° 15′; 2) 103° 18′; 93° 27′ и 158° 15′?

106. Можетъ ли быть такой трегранный уголъ, плоскіе углы котораго соотвѣтственно равны: 1) 103°, 96° и 78°; 2) 112°, 164° и 95°; 3) 82°, 67° и 151°?

107. Одинъ изъ плоскихъ угловъ трегранного угла содержитъ 118° 45′, а другой 92° 15′. Между какими предѣлами можетъ заключаться величина третьяго плоскаго угла?

108. Между какими предѣлами заключается сумма двугранныхъ угловъ трегранного угла?

109. Каждое изъ реберъ трегранного угла перпендикулярно къ плоскости, проходящей черезъ два другія ребра. Этотъ трегранный уголъ пересѣченъ плоскостью такъ, что линіи пересѣченія граней угла съ этой плоскостью соотвѣтственно равны a=8 см., b=12 см. и c=10 см. Опредѣлить длину образовавшихся отрѣзковъ реберъ (отъ вершины угла до пересѣченія съ проведенной плоскостью).

110. Въ трегранномъ углѣ каждый изъ плоскихъ угловъ равенъ 60°. Черезъ точку A, взятую на одномъ изъ реберъ угла на разстояніи a отъ его вершины, проведена плоскость, перпендикулярная къ этому ребру и пересѣкающая два другихъ ребра въ точкахъ B и C. Опредѣлить периметръ треугольника ABC.

111. Въ трегранномъ углѣ плоскіе углы соотвѣтственно равны 45°, 45° и 60°. Опредѣлить величину двугранного угла, заключеннаго между плоскими углами въ 45°.

112. Изъ равныхъ другъ другу равнобедренныхъ треугольниковъ съ угломъ при основаніи въ 70°, требуется составить многогранный уголъ, прикладывая треугольники одинъ къ другому равными сторонами. Сколько граней можетъ имѣть такой многогранный уголъ?

113. Плоскіе углы нѣкотораго многограннаго угла равны между собой. Между какими предѣлами будетъ заключаться величина каждаго изъ этихъ угловъ, если число граней будетъ 3; 4; 5... и, вообще, n.

114. Можетъ ли быть такой выпуклый четырегранный уголъ, въ которомъ плоскіе углы послѣдовательно равны: 1) 56°; 98°; 139° и 72°; 2) 85°; 112°; 34° и 129°; 3) 43°; 84°; 125° и 101°; 4) 32°; 49°; 78° и 162°.

Свойства граней и діагоналей параллелепипеда.

Свойства граней и діагоналей параллелепипеда слѣдующія:

1. Во всякомъ параллелепипедѣ противоположныя грани равны и параллельны.

2. Діагонали всякаго параллелепипеда пересѣкаются въ одной точкѣ и дѣлятся въ ней пополамъ.

3. Въ прямоугольномъ параллелепипедѣ квадратъ діагонали равенъ суммѣ квадратовъ трехъ его измѣреній.

Обозначая измѣренія прямоугольнаго параллелепипеда соотвѣтственно буквами a, b и c, а діагональ его буквой D, имѣемъ:

$$D^2=a^2+b^2+c^2.$$

115. Периметры неравныхъ граней нѣкотораго параллелепипеда равны m=24 дюйм., n=30 дюйм. и p=26 дюйм. Опредѣлить длины реберъ этого параллелепипеда.

116. Опредѣлить разстояніе вершины куба отъ его діагонали, если ребро куба a=4 см.

116a. Опредѣлить длину ребра куба, если разность между его діагональю и діагональю его грани равна m=2 см.

117. Стороны основанія прямоугольнаго параллелепипеда равны a=4 фут. и b=6 фут., а боковое ребро c=4,5 фут. Опредѣлить діагональ параллелепипеда и діагонали его граней.

118. Измѣренія прямоугольнаго параллелепипеда относятся между собой, какъ $m:n:p=2:3:6$. Діагональ параллелепипеда $D=14$ см. Опредѣлить измѣренія параллелепипеда.

119. Опредѣлить измѣренія прямоугольнаго параллелепипеда, если его діагональ $D=17$ дцм., площадь основанія $B=72$ кв. дцм., а периметръ основанія $2p=34$ дцм.

120. Опредѣлить діагональ прямоугольнаго параллелепипеда, если діагонали его неравныхъ граней равны $d_1=15$ см., $d_2=4\sqrt{13}$ см. и $d_3=5\sqrt{5}$ см.

121. Площади трехъ различныхъ граней прямоугольнаго параллелепипеда $M=36$ кв. фут., $N=49$ кв. фут. и $P=25$ кв. фут. Опредѣлить ребра параллелепипеда.

122. Основаніемъ прямого параллелепипеда служитъ ромбъ со стороной $a=5$ см. и одной изъ діагоналей $d=6$ см. Боковое ребро параллелепипеда $b=8$ см. Опредѣлить діагонали параллелепипеда.

123. Стороны основанія прямого параллелепипеда $a=9$ см. и $b=10$ см., а діагонали основанія относятся, какъ $m:n=3:4$. Боковое ребро параллелепипеда $c=10$ см. Опредѣлить діагонали параллелепипеда.

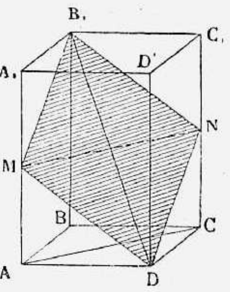
Сѣченіе призмы плоскостью.

Рѣшая задачи этого отдѣла слѣдуетъ предварительно выполнить возможно тщательнѣе соотвѣтствующій чертежъ, такъ какъ неясность чертежа часто представляетъ главное затрудненіе для рѣшающаго. Разсмотрѣвъ полученное сѣченіе и выяснивъ видъ его, надо, въ зависимости отъ условія задачи, установить связь между данными и искомыми элементами и примѣнить соотвѣтствующія теоремы планиметріи, изъ которыхъ чаще другихъ примѣняется теорема Пиѳагора.

Разберемъ слѣдующія задачи.

1. *Прямоугольный параллелепипедъ съ квадратнымъ основаніемъ пересѣченъ плоскостью, проходящей черезъ его діагональ и средину бокового ребра, не прилежащаго къ діагонали. Площадь полученнаго сѣченія* Q, *а площадь основанія* P. *Опредѣлить высоту параллелепипеда.*

Выполнивъ чертежъ и проведя черезъ средину M ребра AA_1 и діагональ B_1D плоскость, найдемъ, что получившееся сѣченіе MB_1ND есть ромбъ. Для опредѣленія высоты параллелепипеда (иначе, его бокового ребра) можно воспользоваться формулой, выражающей зависимость между діагональю параллелепипеда и его измѣреніями, т.-е. формулой $B_1D^2=AD^2+DC^2+DD_1^2$. Изъ разсмотрѣнія ея замѣчаемъ, что рѣшеніе вопроса сводится къ нахожденію сторонъ основанія AD и DC и діагонали B_1D.



Черт. 6.

Такъ какъ основаніе параллелепипеда представляетъ собой квадратъ, то $AD=DC$ и $P=AD^2$; отсюда $AD=\sqrt{P}$; слѣдовательно діагональ квадрата $AC=\sqrt{2P}$.

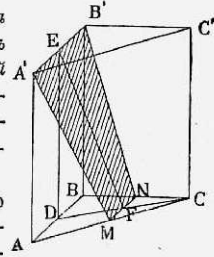
Далѣе, такъ какъ площадь ромба MB_1ND равна $Q=\frac{MN\,.\,B_1D}{2}$, а $MN=AC=\sqrt{2P}$,

$$\text{то } Q=\frac{B_1D\sqrt{2P}}{2}, \text{ откуда } B_1D=\frac{2Q}{\sqrt{2P}}=\frac{Q\sqrt{2P}}{P}.$$

Подставляя найденныя для $AD=DC$ и B_1D выраженія въ формулу $B_1D^2=AD^2+DC^2+DD_1^2$, опредѣлимъ высоту DD_1; получимъ:

$$DD_1=\sqrt{\frac{2(Q+P)(Q-P)}{P}} \text{ линейн. ед.}$$

2. *Прямая трегранная призма, всѣ ребра которой одинаковы и каждое изъ которыхъ равно* a, *пересѣчена плоскостью, проходящей черезъ ребро верхняго основанія и пересѣкающей нижнее основаніе по прямой, параллельной этому ребру и равной его половинѣ. Опредѣлить площадь получившагося сѣченія.*



Черт. 7.

Изобразивъ призму $ABCA_1B_1C_1$ согласно условію задачи (черт. 7) замѣчаемъ, что основаніями призмы служатъ равностороннія треугольники; зная, что сѣкущая плоскость проходитъ черезъ одно изъ реберъ верхняго основанія, нетрудно понять,

что нижнее основаніе эта плоскость пересѣчетъ по средней линіи треугольника ABC. Пусть эта плоскость будетъ A_1B_1NM.

Замѣтивъ, что сѣченіе призмы плоскостью представляетъ собою равнобедренную трапецію ($A_1B_1 \parallel MN$ и $A_1M=B_1N$) и зная, что основанія ея $A_1B_1=a$ и $MN=\frac{a}{2}$, вычислимъ площадь этой трапеціи, если опредѣлимъ ея высоту EF.

Изъ треугольника DEF получимъ: $EF=\sqrt{ED^2+DF^2}$; но, такъ какъ $ED=a, DF=\frac{DC}{2}$, а $DC=\sqrt{AC^2-AD^2}=\sqrt{a^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\frac{a}{2}\sqrt{3}$, то $EF=\sqrt{ED^2+DF^2}=\sqrt{a^2+\left(\frac{a}{2}\sqrt{3}\right)^2}=\frac{a}{4}\sqrt{19}$. Зная EF найдемъ, что искомая площадь сѣченія

$$MA_1B_1N=\frac{(A_1B_1+MN)EF}{2}=\frac{3a^2}{8}\sqrt{19} \text{ кв. ед.}$$

124. Прямоугольный параллелепипедъ съ квадратнымъ основаніемъ пересѣченъ плоскостью, проходящей черезъ сторону основанія. Опредѣлить площадь сѣченія, если сторона основанія параллелепипеда a и уголъ α между плоскостью основанія и сѣкущей плоскостью соотвѣтственно равны: a) $a=10$ см. и $\alpha=30°$, b) $a=2$ метр. и $\alpha=45°$, c) $a=3$ фут. и $\alpha=60°$.

125. Прямоугольный параллелепипедъ съ квадратнымъ основаніемъ пересѣченъ плоскостью, проходящей черезъ ребро нижняго основанія; эта плоскость пересѣкаетъ прямую, соединяющую точки пересѣченія діагоналей основаній параллелепипеда, въ точкѣ, разстояніе которой отъ нижняго основанія равно $m=0{,}6$ метр. Опредѣлить площадь сѣченія, если периметръ основанія параллелепипеда $2p=$ $=2$ метр.

126. Стороны основанія прямоугольнаго параллелепипеда $a=$ $=5$ дюйм. и $b=12$ дюйм., а боковое ребро $c=15$ дюйм. Опредѣлить площадь діагональнаго сѣченія параллелепипеда.

127. Стороны основанія прямоугольнаго параллелепипеда равны $a=5$ см. и $b=16$ см., а боковое ребро $c=12$ см. Опредѣлить площадь сѣченія, проведеннаго черезъ діагонали боковыхъ граней, выходящія изъ концовъ одной и той же стороны (ребра) основанія.

128. Боковое ребро прямоугольнаго параллелепипеда $a=30$ см., площадь діагональнаго сѣченія $M=750$ кв. см., а площадь основанія $B=168$ кв. см. Опредѣлить стороны основанія.

129. Площадь боковой грани прямоугольнаго параллелепипеда съ квадратнымъ основаніемъ равна $Q=9\sqrt{2}$ кв. см. Опредѣлить площадь діагональнаго сѣченія.

130. Въ прямоугольномъ параллелепипедѣ съ квадратнымъ основаніемъ діагональ параллелепипеда равна $D=13$ фут., а діагональ боковой грани $d=12$ фут. Опредѣлить площадь сѣченія, проходящаго черезъ сторону основанія и діагональ параллелепипеда, выходящую изъ конца этой стороны.

131. Въ прямоугольномъ параллелепипедѣ съ квадратнымъ основаніемъ сторона основанія равна $a=10$ дцм., а боковое ребро равно $b=24$ дцм. Опредѣлить площадь сѣченія, проходящаго черезъ концы трехъ реберъ, выходящихъ изъ общей вершины.

132. Основаніемъ прямого параллелепипеда служитъ ромбъ со стороной $a=13$ см. Высота параллелепипеда $H=15$ см., а площадь одного изъ діагональныхъ сѣченій $M=150$ кв. см. Опредѣлить площадь другого діагональнаго сѣченія.

133. Въ прямомъ параллелепипедѣ боковыя грани и меньшее діагональное сѣченіе представляютъ собою квадраты со стороной $a=6$ вершк. Опредѣлить діагонали и площадь большаго діагональнаго сѣченія параллелепипеда.

134. Основаніемъ прямого параллелепипеда служитъ параллелограммъ со сторонами $a=8$ дцм. и $b=5$ дцм. и угломъ между ними въ 60°. Опредѣлить площади діагональныхъ сѣченій, если высота параллелепипеда $H=12$ дцм.

135*). Черезъ концы трехъ реберъ куба, выходящихъ изъ общей вершины, проведена плоскость. Опредѣлить разстояніе этой плоскости отъ общей вершины, если ребро куба $a=7\sqrt{3}$ см.

136*). Три ребра куба, выходящія изъ одной вершины A, пересѣчены плоскостью, проходящей черезъ точки E, F и G этихъ реберъ. Опредѣлить площадь сѣченія, если извѣстно, что $AE=m=2$ фут., $AF=n=1$ фут., и $AG=p=1{,}5$ фут.

137. Кубъ, ребро котораго $a=6$ см., пересѣченъ плоскостью такъ, что въ сѣченіи образовался правильный шестиугольникъ. Опредѣлить площадь сѣченія.

---

*) Эта задача можетъ быть рѣшена послѣ ознакомленія съ вычисленіемъ различныхъ элементовъ пирамиды.

138. Основаніемъ прямой призмы служитъ правильный треугольникъ со стороной $a=2$ фут.; боковое ребро призмы $b=3$ фут. Опредѣлить площадь сѣченія, проходящаго черезъ боковое ребро призмы перпендикулярно противолежащей боковой грани.

139. Въ правильной треугольной призмѣ со стороной основанія $a=3$ дюйм. проведена плоскость черезъ сторону нижняго основанія и вершину верхняго; площадь этого сѣченія $Q=20$ кв. дюйм. Опредѣлить площадь боковой грани призмы.

140. Въ прямой призмѣ съ треугольнымъ основаніемъ, площадь котораго $B=12\sqrt{3}$ кв. см., черезъ одну изъ вершинъ основанія проведена плоскость, образующая съ основаніемъ уголъ въ 30°. Опредѣлить площадь сѣченія.

141. Прямая треугольная призма, каждое изъ реберъ которой равно $a=4$ фут., пересѣчена плоскостью, проходящей черезъ средину бокового ребра и средины двухъ пересѣкающихся съ этимъ ребромъ сторонъ основанія призмы. Опредѣлить площадь сѣченія.

142. Высота прямой призмы равна $H=2{,}4$ фут.; основаніемъ этой призмы служитъ равнобедренный треугольникъ ABC, въ которомъ перпендикуляръ AD, опущенный на сторону CB, равенъ $p=3{,}5$ фут., а длина медіаны этой же стороны равна $m=4{,}8$ фут. Опредѣлить площадь боковой грани, основаніемъ которой служитъ сторона AB треугольника.

143. Въ прямой треугольной призмѣ площади двухъ боковыхъ граней равны $M=35{,}6$ кв. дцм. и $M_1=188$ кв. дцм. Двугранный уголъ, составленный этими гранями, раздѣленъ пополамъ плоскостью. Опредѣлить отношеніе площадей, на которыя эта плоскость разсѣчетъ третью грань призмы.

144. Въ прямоугольномъ параллелепипедѣ, основаніемъ котораго служитъ квадратъ со стороной $a=4$ см., черезъ противоположныя вершины угловъ верхняго и нижняго основаній и средину бокового ребра, равнаго $b=6$ см., проведена плоскость. Опредѣлить площадь полученнаго сѣченія.

145. Основаніемъ прямой призмы служитъ правильный шестиугольникъ со стороной $a=5$ см.; боковое ребро призмы $b=7$ см. Черезъ сторону нижняго основанія и противоположную сторону верхняго основанія проведена плоскость. Опредѣлить площадь образовавшагося сѣченія.

146. Площади двухъ боковыхъ граней прямой треугольной призмы $ABCDEF$ соотвѣтственно равны $ACFD=P=19$ кв. фут. и $BCFE=Q=17$ кв. фут. Черезъ ребро AD проведена плоскость, перпендикулярная къ противолежащей грани или къ ея продолженію. Опредѣлить площадь боковой грани $ABED$ этой призмы, если 1) уголъ $DFCB$ — острый, плоскость $ADMN$ лежитъ внутри призмы и отсѣкаетъ отъ грани $BEPQ$ параллелограммъ $CFMN$, площадь котораго $M=9{,}5$ кв. фут., 2) уголъ $DFCB$ — тупой, перпендикулярная плоскость лежитъ внѣ призмы и отсѣкаетъ на продолженіи боковой грани $BCFE$ параллелограммъ $CFPQ$, площадь котораго $N=13{,}44$ кв. фут.

147. Основаніемъ прямой призмы съ высотой $H=10$ см. служитъ трапеція, параллельныя стороны которой $a=6$ см. и $c=4$ см. Черезъ прямую пересѣченія діагональныхъ плоскостей призмы проведена плоскость параллельно гранямъ, основаніями которыхъ служатъ параллельныя стороны трапеціи. Опредѣлить площадь образовавшагося сѣченія.

Поверхность призмы.

При рѣшеніи задачъ на опредѣленіе поверхности призмы условимся обозначать боковую поверхность призмы черезъ $S_б$, а ея полную поверхность черезъ S.

При опредѣленіи боковой поверхности всякой призмы примѣняется теорема:

Боковая поверхность всякой призмы равна периметру перпендикулярнаго сѣченія, умноженному на боковое ребро призмы.

Въ случаѣ призмы *прямой*, периметромъ перпендикулярнаго сѣченія будетъ служить периметръ многоугольника основанія призмы. Обозначая этотъ периметръ черезъ P, а боковое ребро призмы черезъ b, для опредѣленія боковой поверхности прямой призмы получимъ формулу

$$S_б=P\,.\,b.$$

При опредѣленіи полной поверхности призмы, прямой или наклонной, слѣдуетъ къ ея боковой поверхности прибавить удвоенную площадь многоугольника основанія призмы. Обозначая ее буквой B, получимъ общую формулу

$$S=S_б+2B.$$

Поверхность куба.

Обозначивъ ребро куба буквой a и замѣтивъ, что каждая грань куба представляетъ собою квадратъ, для опредѣленія боковой и полной поверхностей куба, получимъ формулы:

$$S_б=4a^2 \quad и \quad S=6a^2.$$

148a. Ребро куба $a=18$ см. Опредѣлить поверхность этого куба.

148b. Сумма реберъ куба $m=18$ дюйм. Опредѣлить поверхность этого куба.

149. Діагональ грани куба $d=2,4$ дцм. Опредѣлить поверхность этого куба.

150. Діагональ куба $D=19$ фут. Опредѣлить его поверхность.

151. Ребро куба $a=28$ см. Опредѣлить ребро другого куба, поверхность котораго въ $n=3$ раза меньше поверхности даннаго.

152. Опредѣлить отношеніе боковой поверхности куба ко всей его поверхности.

153. Сумма ребра одного куба съ ребромъ другого=8 метр.; сумма поверхностей этихъ кубовъ равна 204 кв. метр. Опредѣлить длину ребра каждаго изъ кубовъ.

154. Площадь діагональнаго сѣченія куба $Q=16\sqrt{2}$ кв. дцм. Опредѣлить поверхность куба.

Поверхность параллелепипеда.

Обозначивъ стороны основанія прямоугольнаго параллелепипеда черезъ a и b, а боковое ребро черезъ c и замѣтивъ, что a, b и c служатъ измѣреніями параллелепипеда, найдемъ, что

$$S_б=2ac+2bc=2c(a+b) \quad и$$
$$S=2ac+2bc+2ab=2(ac+bc+ab).$$

Въ случаѣ параллелепипеда *прямого* (т.-е. такого, основаніемъ котораго служитъ не прямоугольникъ, а параллелограммъ) для опредѣленія его боковой поверхности будемъ имѣть, какъ и въ случаѣ прямоугольнаго параллелепипеда, формулу

$$S_б=2c(a+b),$$

гдѣ a и b — стороны основанія параллелепипеда, а c — его боковое ребро.

Что же касается до опредѣленія полной поверхности прямого параллелепипеда, то получимъ:

$$S=2c(a+b)+2B,$$

причемъ B (площадь основанія параллелепипеда) опредѣляется въ зависимости отъ данныхъ задачи*).

155. Опредѣлить поверхность прямоугольнаго параллелепипеда съ квадратнымъ основаніемъ, если сторона основанія равна $a=5$ см., а высота $H=8$ см.

156. Опредѣлить площадь квадратнаго основанія прямоугольнаго параллелепипеда, высота котораго $H=4,1$ метр., а боковая поверхность $S_б=11,48$ кв. метр.

157. Основаніемъ прямоугольнаго параллелепипеда служитъ квадратъ со стороной $a=7$ дюйм. Опредѣлить боковое ребро параллелепипеда, если его поверхность $S=322$ кв. дюйм.

158a. Поверхность прямоугольнаго параллелепипеда съ квадратнымъ основаніемъ равна $S=180$ кв. фут., а сторона основанія равна $a=5$ фут. Опредѣлить боковое ребро параллелепипеда.

158b. Опредѣлить длину діагонали прямоугольнаго параллелепипеда съ квадратнымъ основаніемъ, если боковая поверхность его равна 225,6 кв. фут., а высота=4,7 фут.

159. Боковая поверхность прямоугольнаго параллелепипеда съ квадратнымъ основаніемъ равна $S_б=264$ кв. см., а полная поверхность $S=336$ кв. см. Опредѣлить высоту параллелепипеда.

160. Діагональ прямоугольнаго параллелепипеда съ квадратнымъ основаніемъ равна $d=5$ дцм., а высота параллелепипеда $H=3$ дцм. Опредѣлить его поверхность.

161. Діагональ прямоугольнаго параллелепипеда съ квадратнымъ основаніемъ равна $D=13$ фут., а діагональ боковой грани $d=4\sqrt{10}$ фут. Опредѣлить поверхность параллелепипеда.

162. Стороны основанія прямоугольнаго параллелепипеда равны $a=4$ см. и $b=6$ см. Опредѣлить поверхность параллелепипеда, если его боковое ребро $c=7$ см.

163. Стороны основанія прямоугольнаго параллелепипеда равны $a=6$ см. и $b=8$ см. Опредѣлить боковое ребро параллелепипеда, если его поверхность $S=376$ кв. см.

---

*) Случай наклоннаго параллелепипеда разсмотрѣнъ въ отдѣлѣ задачъ о наклонной призмѣ (стран. 46).

164. Въ прямоугольномъ параллелепипедѣ стороны основанія равны a=12 см. и b=5 см., а площадь діагональнаго сѣченія Q=104 кв. см. Опредѣлить боковую поверхность параллелепипеда.

165. Поверхность прямоугольнаго параллелепипеда S=352 кв. дцм., площадь основанія B=56 кв. дцм., а одна изъ сторонъ этого основанія a=7 дцм. Опредѣлить боковое ребро параллелепипеда.

166. Въ прямоугольномъ параллелепипедѣ одна изъ сторонъ основанія a=9 дцм. Высота параллелепипеда H=13 дцм., а его поверхность S=762 кв. дцм. Опредѣлить другую сторону основанія.

167. Въ прямоугольномъ параллелепипедѣ одна изъ сторонъ основанія равна a=15 фут. Полная поверхность параллелепипеда S= =930 кв. фут., а боковая поверхность $S_б$=630 кв. фут. Опредѣлить другую сторону основанія и высоту параллелепипеда.

168. Поверхность прямоугольнаго параллелепипеда S=236 кв. метр., высота H=8 метр., а площадь основанія B=30 кв. метр. Опредѣлить стороны основанія.

169. Опредѣлить поверхность прямоугольнаго параллелепипеда, стороны основанія котораго относятся между собой, какъ 4 : 3, а площадь діагональнаго сѣченія, представляющаго квадратъ, равна 16 кв. фут.

170. Поверхность прямоугольнаго параллелепипеда S=184,5 кв. дцм. Опредѣлить измѣренія параллелепипеда, если они относятся какъ $m : n : p$=2 : 3 : 7.

171. Какъ измѣнится боковая поверхность прямоугольнаго параллелепипеда, если его высота увеличится въ три раза, а каждая изъ сторонъ основанія уменьшится въ два раза.

172. Основаніемъ прямого параллелепипеда служитъ параллелограммъ со сторонами a=13 дюйм., b=15 дюйм. и одной изъ діагоналей d=14 дюйм. Боковое ребро параллелепипеда c=14 дюйм. Опредѣлить поверхность параллелепипеда.

173. Основаніемъ прямого параллелепипеда служитъ параллелограммъ со сторонами a=9 см., b=8 см. и площадью B=65 кв. см. Опредѣлить поверхность параллелепипеда, если его боковое ребро c=10 см.

174. Опредѣлить поверхность прямого параллелепипеда, основаніемъ котораго служитъ параллелограммъ со сторонами a=35 см. и b=40 см. и угломъ между ними въ 120°, если площадь діагональнаго сѣченія, проходящаго черезъ большую діагональ, равна B=243,75 кв. см.

175. Основаніемъ прямого параллелепипеда служитъ параллелограммъ, стороны котораго соотвѣтственно равны a=7,85 дцм. и b=8,8 дцм. Опредѣлить діагонали основанія этого параллелепипеда, если его поверхность равна S=189,96 кв. дцм., а высота H=6 дцм.

176. Боковая поверхность прямого параллелепипеда равна 240 кв. метр., высота его равна 12 метр., а площадь одной изъ боковыхъ граней на 48 кв. метр. больше площади второй изъ нихъ. Опредѣлить стороны основанія этого параллелепипеда.

177. Основаніемъ прямого параллелепипеда служитъ параллелограммъ со сторонами a=5 см. и b=6 см., уголъ между которыми равенъ 30°. Опредѣлить полную поверхность параллелепипеда, если его боковое ребро c=7 см.

178. Основаніемъ прямого параллелепипеда служитъ ромбъ со стороной a=5 см. и діагональю d=8 см. Опредѣлить его поверхность, если боковое ребро равно b=12 см.

179. Основаніемъ прямого параллелепипеда служитъ ромбъ, діагонали котораго d_1=0,3 дцм. и d_2=0,4 дцм. Опредѣлить поверхность этого параллелепипеда, если его высота H=0,45 дцм.

180. Опредѣлить поверхность прямого параллелепипеда, основаніемъ котораго служитъ ромбъ со стороной a=1,75 дцм. и большей діагональю d_1=2,8 дцм., если извѣстно, что площадь діагональнаго сѣченія, проходящаго черезъ большую діагональ основанія, равна B=3,08 кв. дцм.

181. Опредѣлить боковую поверхность прямого параллелепипеда, основаніемъ котораго служитъ ромбъ съ периметромъ $2p$=12 см., если периметръ боковой грани $2p'$=18 см.

182. Основаніемъ прямого параллелепипеда служитъ ромбъ со стороной a=13 дцм. Поверхность параллелепипеда S=536 кв. дцм., а боковое ребро b=8 дцм. Опредѣлить діагонали основанія.

183. Основаніемъ прямого параллелепипеда служитъ ромбъ, одинъ изъ угловъ котораго равенъ 150°. Опредѣлить сторону этого ромба, если извѣстно, что высота параллелепипеда равна 2,8 дюйм., а его поверхность равна 81 кв. дюйм.

184. Основаніемъ прямого параллелепипеда служитъ ромбъ со стороной a=8 дюйм. и однимъ изъ угловъ въ 45°. Боковое ребро параллелепипеда b=12 дюйм. Опредѣлить поверхность параллелепипеда.

185. Основаніемъ прямого параллелепипеда служитъ ромбъ со стороной $a=9$ фут. и однимъ изъ угловъ въ 120°. Опредѣлить боковое ребро параллелепипеда, если его поверхность $S=288,63$ кв. фут.

186. Опредѣлить поверхность прямого параллелепипеда, основаніемъ котораго служитъ ромбъ, если извѣстно, что большая діагональ этого ромба $d_1=3,32$ дцм., меньшая діагональ равна его сторонѣ, а боковое ребро параллелепипеда относится къ сторонѣ основанія, какъ $m:n=338:17$.

Поверхность прямой треугольной призмы.

При опредѣленіи боковой поверхности прямой треугольной призмы пользуются ранѣе указанной теоремой, которую, примѣнительно къ данному случаю, можно выразить слѣдующимъ образомъ:

Боковая поверхность прямой треугольной (и вообще многоугольной) *призмы равна периметру ея основанія, умноженному на боковое ребро* (высоту) *призмы.*

При опредѣленіи полной поверхности прямой призмы слѣдуетъ опредѣлить удвоенную площадь ея основанія, что производится такъ или иначе въ зависимости отъ вида треугольника, лежащаго въ основаніи призмы.

187. Опредѣлить поверхность правильной треугольной призмы, сторона основанія которой $a=11$ вершк., а высота $H=30,5$ вершк.

188. Поверхность правильной треугольной призмы $S=62,5$ кв. дцм., а сторона основанія въ $n=5$ разъ меньше высоты. Опредѣлить высоту призмы.

189. Опредѣлить поверхность правильной треугольной призмы, если высота основанія призмы $h=10,2$ дцм., а діагональ боковой грани $d=36$ дцм.

190. Боковая поверхность правильной треугольной призмы $S_б=$ $=135$ кв. арш., а сторона основанія $a=5$ арш.. Опредѣлить полную поверхность и высоту призмы.

191. Боковая поверхность правильной треугольной призмы $S_б=$ $=84$ кв. см., а высота ея $H=7$ см. Опредѣлить сторону основанія и полную поверхность призмы.

192. Полная поверхность правильной треугольной призмы $S=$ $=72\sqrt{3}$ кв. см., а высота ея $H=3\sqrt{3}$ см. Опредѣлить сторону основанія призмы.

193. Боковая поверхность правильной треугольной призмы $S_б=$ $=126$ кв. см., а ея полная поверхность $S=18(7+\sqrt{3})$ кв. см. Опредѣлить сторону основанія и высоту призмы.

194. Опредѣлить поверхность правильной треугольной призмы, если площадь основанія призмы $B=27$ кв. метр., а высота призмы $H=8$ метр.

195. Основаніемъ прямой призмы служитъ равнобедренный треугольникъ, въ которомъ боковая сторона $a=12$ дцм., а основаніе $b=13,2$ дцм. Высота призмы $H=14,4$ дцм. Опредѣлить поверхность призмы.

196. Основаніемъ прямой призмы служитъ равнобедренный треугольникъ, въ которомъ основаніе $b=12$ см., а боковая сторона $a=10$ см. Поверхность призмы $S=416$ кв. см. Опредѣлить высоту призмы.

197. Основаніемъ прямой призмы служитъ равнобедренный треугольникъ, въ которомъ основаніе $b=10$ дюйм. Боковая поверхность призмы $S_б=288$ кв. дюйм., а полная поверхность $S=408$ кв. дюйм. Опредѣлить боковую сторону основанія призмы и высоту.

198. Основаніемъ прямой призмы служитъ равнобедренный треугольникъ, въ которомъ боковая сторона $a=18,5$ дцм. Боковая поверхность призмы $S_б=410,7$ кв. дцм., а полная поверхность $S=$ $739,26$ кв. дцм. Опредѣлить высоту призмы.

199. Основаніемъ прямой призмы служитъ равнобедренный треугольникъ съ боковой стороной $a=15$ фут. Высота призмы $H=10$ фут., а боковая поверхность $S_б=480$ кв. фут. Опредѣлить площадь основанія.

200. Основаніемъ прямой призмы служитъ равнобедренный треугольникъ, въ которомъ основаніе $b=6$ см., а площадь основанія $B=12$ кв. см. Опредѣлить высоту призмы, если ея боковая поверхность $S_б=160$ кв. см.

201. Опредѣлить поверхность прямой призмы, основаніемъ которой служитъ прямоугольный треугольникъ съ катетами $a=10$ см. и $b=24$ см., если высота призмы $H=20$ см.

202. Опредѣлить боковую поверхность прямой призмы, основаніемъ которой служитъ прямоугольный треугольникъ съ площадью $B=$ $=54$ кв. дюйм. и отношеніемъ катетовъ $m:n=3:4$, если высота призмы равна гипотенузѣ основанія.

203. Основаніемъ прямой призмы служитъ прямоугольный треугольникъ, гипотенуза котораго $c=10$ см. Опредѣлить боковую по-

верхность призмы, если площадь боковой грани, основаніемъ которой служитъ меньшій катетъ треугольника, равна $M=30$ кв. см., а площадь основанія призмы $B=24$ кв. см.

204. Опредѣлить поверхность прямой треугольной призмы, высота которой $H=90$ см., а стороны основанія $a=13$ см., $b=21$ см. и $c=20$ см.

205. Въ прямой треугольной призмѣ высота $H=9{,}5$ дцм., двѣ изъ сторонъ основанія $a=16{,}75$ дцм. и $b=18{,}25$ дцм., а боковая поверхность $S_б=522{,}5$ кв. дцм. Опредѣлить третью сторону основанія.

206. Въ прямой треугольной призмѣ двѣ изъ сторонъ основанія $a=10$ см. и $b=6{,}5$ см.; боковая поверхность $S_б=520$ кв. см., а полная поверхность $S=646$ кв. см. Опредѣлить третью сторону основанія и высоту призмы.

207. Въ прямой треугольной призмѣ одна изъ сторонъ основанія $a=21$ см., высота призмы $H=10$ см., боковая поверхность $S_б=540$ кв. см., а полная поверхность $S=792$ кв. см. Опредѣлить стороны основанія призмы.

208. Высота прямой треугольной призмы равна 43,5 дцм., площадь основанія=52,25 кв. дцм. и одна изъ сторонъ основанія 36 дцм. Опредѣлить другія стороны основанія, если боковая поверхность призмы 1827 кв. дцм.

Поверхность прямой многоугольной призмы.

При рѣшеніи нижеприводимыхъ задачъ примѣняются соображенія, высказанныя въ отдѣлѣ задачъ на опредѣленіе поверхности прямой треугольной призмы.

Для опредѣленія площадей многоугольниковъ основанія призмы примѣняются свойства этихъ фигуръ, разсмотрѣнныя въ соотвѣтствующихъ отдѣлахъ первой части задачника.

209. Основаніемъ прямой призмы служитъ равнобедренная трапеція, боковая сторона которой $b=25$ см., а основанія соотвѣтственно $a=10$ см. и $c=40$ см. Опредѣлить поверхность этой призмы, если извѣстно, что высота ея $H=75$ см.

210. Опредѣлить поверхность прямой призмы, основаніемъ которой служитъ равнобедренная трапеція, если извѣстно, что одно изъ основаній трапеціи $a=7{,}5$ дцм., высота трапеціи $h=9$ дцм., площадь трапеціи $B=128{,}25$ кв. дцм., а высота призмы $H=9{,}5$ дцм.

211. Сторона основанія правильной пятиугольной призмы равна $a=3$ фут. Опредѣлить поверхность этой призмы, если высота ея $H=10$ фут.

212. Опредѣлить поверхность правильной пятиугольной призмы, если площадь ея основанія $B=9$ кв. см., а боковое ребро $b=2{,}5$ см.

213. Опредѣлить поверхность правильной пятиугольной призмы, если апоѳема основанія призмы $a=6$ фут., а діагональ боковой грани $d=11$ фут.

214. Въ прямой призмѣ, основаніемъ которой служитъ правильный шестиугольникъ со стороной $a=2{,}6$ см., высота равна $H=6{,}4$ см. Опредѣлить поверхность этой призмы.

215. Опредѣлить поверхность правильной шестиугольной призмы, высота которой равна сторонѣ основанія, а апоѳема основанія $a=2$ см.

216. Основаніемъ прямой призмы служитъ правильный шестиугольникъ съ апоѳемой $a=4{,}3$ дюйм. Опредѣлить поверхность этой призмы, если діагональ боковой грани $d=12$ дюйм.

217. Основаніемъ прямой призмы служитъ правильный шестиугольникъ, площадь котораго $B=1{,}96$ кв. саж. Высота призмы $H=0{,}8$ саж. Опредѣлить поверхность призмы.

218. Поверхность правильной шестиугольной призмы $S=86$ кв. фут., а сторона основанія равна высотѣ призмы. Опредѣлить высоту.

219. Опредѣлить отношеніе поверхностей двухъ правильныхъ призмъ, имѣющихъ одинаковую высоту $H=13$ дцм., если длина стороны основанія каждой изъ этихъ призмъ равна $a=7$ дцм. и основаніемъ одной изъ нихъ служитъ шестиугольникъ, а основаніемъ другой—квадратъ.

220. Основаніемъ прямой призмы служитъ правильный восьмиугольникъ съ апоѳемой $a=6$ см. Діагональ боковой грани $d=9{,}6$ см. Опредѣлить поверхность призмы.

221. Опредѣлить поверхность правильной восьмиугольной призмы, площадь основанія которой $B=134$ кв. дцм., а высота призмы $H=4{,}5$ дцм.

222. Въ окружность, радіусъ которой $r=2$ фут., вписанъ и около той же окружности описанъ правильный восьмиугольникъ. Тотъ и другой восьмиугольникъ служатъ основаніями двухъ прямыхъ призмъ съ одинаковой высотой $H=10$ фут. Опредѣлить поверхность каждой изъ этихъ призмъ.

223. Радіусъ окружности, описанной около основанія правильной десятиугольной призмы, равенъ $r=0,5$ фута, а высота этой призмы равна $H=0,2$ фута. Опредѣлить боковую поверхность призмы.

224. Основаніемъ прямой призмы служитъ правильный десятиугольникъ, площадь котораго $B=144$ кв. дюйма. Опредѣлить поверхность призмы, если ея боковое ребро $b=16,8$ дюйма.

225. Основаніемъ прямой призмы служитъ правильный десятиугольникъ съ апоѳемой $a=8,4$ дцм. Радіусъ окружности, описанной около боковой грани $R=5,4$ дцм. Опредѣлить поверхность призмы.

226. Опредѣлить поверхность правильной двѣнадцатиугольной призмы, если площадь ея основанія $B=63,03$ кв. см., а высота призмы $H=1,6$ см.

227. Основаніемъ прямой призмы служитъ правильный двѣнадцатиугольникъ съ апоѳемой $a=2,4$ метр. Діагональ боковой грани $d=7,2$ метр. Опредѣлить поверхность призмы.

Поверхность наклонной призмы.

Боковая поверхность наклонной призмы, какъ было уже сказано въ началѣ отдѣла о вычисленіи поверхности призмы, равна периметру ея перпендикулярнаго сѣченія, умноженному на боковое ребро призмы.

Это соотношеніе примѣняется въ большинствѣ нижеприводимыхъ задачъ, а въ нѣкоторыхъ изъ нихъ поверхность призмы опредѣляется независимо отъ указаннаго соотношенія вычисленіемъ площадей граней данной призмы.

При опредѣленіи полной поверхности наклонной призмы площади ея основаній вычисляются въ зависимости отъ вида многоугольника, лежащаго въ основаніи призмы.

228. Опредѣлить полную поверхность наклонной призмы, въ которой площадь основанія $B=24$ кв. дюйм., боковое ребро $b=8$ дюйм., а перпендикулярное сѣченіе представляетъ собой равносторонній треугольникъ со стороной $a=3$ дюйм.

229. Боковая поверхность наклонной призмы $S_б=4516,75$ кв. см., а перпендикулярное сѣченіе представляетъ собой треугольникъ со сторонами $a=31,5$ см. $b=35,5$ см., и $c=34,5$ см. Опредѣлить длину бокового ребра призмы.

230. Правильная треугольная призма, въ которой ребро основанія $a=5,8$ дюйм., пересѣчена двумя параллельными плоскостями, составляющими съ плоскостью основанія нѣкоторый уголъ. Опредѣлить боковую поверхность образовавшейся наклонной призмы, если длина ея ребра равна $b=7,5$ дюйм.

231. Высота наклонной призмы $H=24$ см., проекція бокового ребра на основаніе равна $m=10$ см., а периметръ сѣченія, перпендикулярнаго боковому ребру, равенъ $2p=30$ см. Опредѣлить боковую поверхность призмы.

232. Боковая поверхность наклонной треугольной призмы $S_б=112$ кв. дюйм., боковое ребро $a=8$ дюйм., а разстоянія одного изъ боковыхъ реберъ до двухъ другихъ равны $m=5$ дюйм. и $n=6$ дюйм. Опредѣлить разстояніе между двумя послѣдними боковыми ребрами.

233. Въ наклонной треугольной призмѣ боковое ребро $c=20$ см., а перпендикулярное сѣченіе есть правильный треугольникъ, высота котораго $h=12,5$ см. Опредѣлить боковую поверхность этой призмы.

234. Въ наклонной треугольной призмѣ перпендикулярное сѣченіе есть равнобедренный прямоугольный треугольникъ, площадь котораго $B=40$ кв. метр. Опредѣлить боковую поверхность этой призмы, если извѣстно, что длина ея бокового ребра $c=10$ метр.

235. Основаніемъ наклонной призмы служитъ равнобедренный треугольникъ ABC, въ которомъ $AB=BC=a=5$ см. и $AC=b=4$ см. Боковое ребро, проходящее черезъ вершину B основанія, наклонено къ ребрамъ AB и BC подъ углами въ $60°$ и равно $c=8$ см. Опредѣлить боковую поверхность призмы.

236. Основаніемъ наклоннаго параллелепипеда служитъ квадратъ со стороной $a=6$ дюйм. Одно изъ боковыхъ реберъ образуетъ съ прилежащими сторонами основанія углы въ $30°$. Опредѣлить боковую поверхность параллелепипеда, если длина бокового ребра равна $b=10$ дюйм.

237. Основаніемъ наклоннаго параллелепипеда служитъ прямоугольникъ со сторонами $a=6$ см. и $b=9$ см. Одно изъ боковыхъ реберъ образуетъ съ прилежащей стороной a основанія уголъ въ $45°$, а со стороной b—уголъ въ $60°$. Опредѣлить полную поверхность параллелепипеда, если боковое ребро $c=8$ см.

238. Опредѣлить поверхность наклоннаго параллелепипеда, въ которомъ ребра, выходящія изъ одной общей вершины равны $a=5$ см., $b=6$ см. и $c=7$ см., а каждый изъ угловъ между ними равенъ $45°$.

239. Опредѣлить боковую поверхность наклонной призмы, боковое ребро которой $c=4$ метр., а перпендикулярное сѣченіе есть правильный пятиугольникъ со стороной $a=1{,}75$ метр.

240. Опредѣлить боковую поверхность наклонной шестиугольной призмы, боковое ребро которой $c=2$ дцм., а перпендикулярное сѣченіе есть правильный многоугольникъ, въ которомъ діагональ, соединяющая концы двухъ смежныхъ сторонъ $d=1{,}6$ дцм.

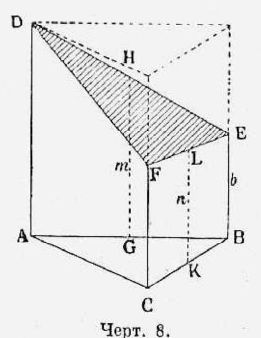
241. Перпендикулярное сѣченіе наклонной призмы есть правильный десятиугольникъ; радіусъ окружности, описанной около этого многоугольника, $R=10$ см. Опредѣлить длину бокового ребра призмы, если ея боковая поверхность $S_б=100$ кв. см.

Призма, усѣченная непараллельно основанію.

Въ нижеприводимыхъ задачахъ приходится, главнымъ образомъ, пользоваться свойствомъ средней линіи трапеціи, теоремой Пиѳагора и соотвѣтствующими формулами, служащими для опредѣленія площадей треугольниковъ и четыреугольниковъ.

Рѣшимъ слѣдующую задачу.

Прямая призма, основаніемъ которой служитъ правильный треугольникъ со стороной a, пересѣчена плоскостью, непараллельной основанію; средины двухъ сторонъ треугольника сѣченія отстоятъ отъ плоскости основанія соотвѣтственно на разстояніяхъ m и n, а длина бокового ребра, проходящаго черезъ вершину угла, заключеннаго между этими сторонами, равна b. Опредѣлить боковую поверхность полученной усѣченной призмы.



Черт. 8.

Выполнивъ чертежъ согласно условію задачи, положимъ, что $AC=CB=AB=a$, $BE=b$, $GH=m$ и $KL=n$.

Для опредѣленія искомой боковой поверхности призмы слѣдуетъ вычислить сумму площадей ея боковыхъ граней. Каждая изъ этихъ граней представляетъ собой прямоугольную трапецію, высотой которой служитъ сторона основанія призмы. Замѣтивъ, что GH и KL представляютъ собой среднія линіи трапецій $ADEB$ и $CFEB$, опредѣлимъ площади этихъ трапецій. Найдемъ:

площ. $ADEB=CH.AB=ma$, и площ. $CFEB=KL.CB=na$.

Для опредѣленія площади грани $ADFC$ необходимо вычислить длину каждой изъ параллельныхъ сторонъ AD и CF, послѣ чего эта площадь выразится въ видѣ $\frac{(AD+CF).AC}{2}$.

Ребро AD опредѣлимъ изъ разсмотрѣнія трапеціи $ADEB$, воспользовавшись выраженіемъ длины средней линіи ея черезъ параллельныя стороны, послѣ чего получимъ: $AD=2GH-EB=$ $=2m-b$.

Такимъ же образомъ, изъ разсмотрѣнія трапеціи $CFEB$, найдемъ, что $CF=2KL-BE=2n-b$. Слѣдовательно

$$\text{площ. } ADFC=\frac{(2m-b+2n-b)a}{2}=(m+n-b)a.$$

Зная теперь площадь каждой изъ боковыхъ граней призмы, опредѣлимъ ея боковую поверхность въ видѣ

$$S_б=ma+na+(m+n-b)a=a(2m+2n-b).$$

242. Параллелепипедъ усѣченъ непараллельно основанію такъ, что три изъ его боковыхъ реберъ послѣдовательно равны: $a=10{,}5$ дцм., $b=12{,}5$ дцм. и $c=15{,}5$ дцм. Опредѣлить длину четвертаго бокового ребра.

243. Въ треугольной призмѣ, усѣченной непараллельно основанію, сторона основанія раздѣлена пополамъ и точка дѣленія соединена прямой съ противолежащей вершиной треугольника основанія; отъ той же вершины по этой прямой отложены двѣ трети ея длины и изъ полученной точки проведена прямая, параллельная боковому ребру призмы, до пересѣченія со вторымъ основаніемъ призмы; эта прямая равна $a=6{,}21$ ф. Опредѣлить длину ребра призмы, если два другія ребра ея соотвѣтственно равны $b=5{,}98$ ф. и $c=6{,}43$ ф.

244. Ребра прямой треугольной призмы, усѣченной непараллельно основанію, равны: $a=18$ см., $b=9$ см. и $c=14$ см. Черезъ ребро b проведена плоскость, пересѣкающая основаніе призмы по медіанѣ стороны, противоположной ребру b. Опредѣлить площадь образовавшагося сѣченія и каждую изъ его діагоналей, если эта медіана равна $m=12$ см.

245. Основаніемъ прямой усѣченной призмы служитъ правильный шестиугольникъ; три изъ его боковыхъ реберъ послѣдовательно

равны: a=10 ф., b=12 ф. и c=13 ф. Опредѣлить длину каждаго изъ остальныхъ трехъ реберъ призмы.

246. Боковыя ребра наклонной треугольной призмы, усѣченной непараллельно основанію, соотвѣтственно равны: a=1,5 дцм., b=1,8 дцм. и c=2,1 дцм. Сѣченіе, перпендикулярное ребрамъ призмы, имѣетъ видъ равнобедреннаго треугольника, вершина котораго лежитъ на ребрѣ c призмы, а основаніе его и боковая сторона равны послѣдовательно n=0,8 дцм. и m=0,5 дцм. Опредѣлить боковую поверхность призмы.

247. Боковыя ребра треугольной призмы, усѣченной непараллельно основанію, соотвѣтственно равны a=6,5 ф., b=4,9 ф. и c=5,32 ф. Сѣченіе, перпендикулярное къ боковымъ ребрамъ призмы, есть треугольникъ со сторонами m=2,3 ф., n=3 ф. и p=1,94 ф. (m—между a и b, а n—между a и c). Опредѣлить боковую поверхность призмы.

248. Въ треугольной призмѣ $ABCA_1B_1C_1$, съ боковымъ ребромъ $AA_1=n=8$ дцм., извѣстны площади боковыхъ граней $AB_1=M=$ $=24$ кв. дцм., $AC_1=N=20$ кв. дцм. и $CB_1=P=18$ кв. дцм. Отъ этой призмы отсѣчена призма $ABCDEF$ такъ, что ея ребра послѣдовательно равны $AD=a=5$ дцм., $BE=b=2$ дцм. и $CF=$ $=c=3$ дцм. Опредѣлить боковую поверхность усѣченной призмы.

249. Боковыя ребра прямой усѣченной треугольной призмы равны a=8 дцм., b=10 дцм. и c=11 дцм., а стороны основанія, противолежащія этимъ ребрамъ, равны соотвѣтственно m=7 дцм., $n=$ =9 дцм. и p=12 дцм. Опредѣлить боковую поверхность этой призмы.

250. Пользуясь условіемъ предыдущей задачи опредѣлить полную поверхность усѣченной призмы, полагая a=18,8 дцм., b=14 дцм., c=15,6 дцм., m=13,2 дцм., n=8 дцм. и p=10 дцм.

251. Въ прямомъ параллелепипедѣ съ квадратнымъ основаніемъ сторона основанія равно a=6 см., а высота параллелепипеда H=16 см. Черезъ сторону верхняго основанія и средины двухъ боковыхъ реберъ проведена плоскость. Опредѣлить полную поверхность каждой изъ частей, на которыя проведенная плоскость разсѣкла этотъ параллелепипедъ.

252. Основаніемъ усѣченной призмы служитъ ромбъ со стороной a=8 дюйм. и діагональю d=8 дюйм. Боковыя ребра призмы, проходящія черезъ концы меньшей діагонали основанія, одинаковы и равны каждое b=3,5 дюйм., а одно изъ двухъ остальныхъ реберъ

равно c=6 дюйм. и составляетъ съ данной діагональю основанія уголъ съ 45°. Опредѣлить діагонали сѣченія, проходящаго черезъ неравныя ребра призмы.

Свойства параллельныхъ сѣченій въ пирамидѣ.

При рѣшеніи задачъ этого отдѣла примѣняются слѣдующія теоремы:

1. Плоскость, параллельная плоскости основанія пирамиды, дѣлитъ боковыя ребра и высоту этой пирамиды на пропорціональные отрѣзки и образуетъ въ сѣченіи многоугольникъ, подобный многоугольнику основанія пирамиды.

2. Площади основанія пирамиды и параллельнаго ему сѣченія относятся между собою, какъ квадраты ихъ разстояній отъ вершины пирамиды.

3. Если пирамиды, основанія которыхъ лежатъ въ одной плоскости, а высоты равны между собой, пересѣчь плоскостью, параллельной плоскости ихъ основаній, то площади многоугольниковъ получившихся сѣченій будутъ пропорціональны площадямъ многоугольниковъ основаній этихъ пирамидъ.

Кромѣ этихъ теоремъ приходится иногда примѣнять теорему Пиѳагора, а также пользоваться соотвѣтствующими теоремами о подобныхъ треугольникахъ и многоугольникахъ.

253. Пирамида пересѣчена плоскостью параллельно основанію; эта плоскость дѣлитъ одно изъ боковыхъ реберъ на части m=20 см. и n=28 см. На какія части раздѣлитъ она высоту пирамиды H=36 см.

254. Плоскость, параллельная основанію пирамиды, дѣлитъ одно изъ боковыхъ реберъ на части, въ отношеніи $m:n=3:5$ (считая отъ основанія). Опредѣлить площадь образовавшагося сѣченія, если площадь основанія пирамиды B=75 кв. фут.

255. Пирамида, площадь основанія которой B=144 кв. дцм. пересѣчена двумя плоскостями, параллельными основанію призмы; эти плоскости дѣлятъ высоту пирамиды въ отношеніи $m:n:p=$ $=3:5:4$ (считая отъ основанія). Опредѣлить площади образовавшихся сѣченій.

256. Площадь основанія пирамиды B=41,2 кв. арш., а высота пирамиды H=12 арш. На какомъ разстояніи отъ вершины пирамиды слѣдуетъ провести плоскость, параллельную основанію, чтобы площадь сѣченія была равна B_1=10,3 кв. арш.

257. Пирамида пересѣчена плоскостью, параллельной основанію такъ, что площадь образовавшагося сѣченія $B_1=26,88$ кв. см. На какомъ разстояніи отъ основанія проведено это сѣченіе, если площадь основанія $B=94,5$ кв. см., а высота пирамиды $H=15$ см.

258. Плоскость, параллельная основанію пирамиды, дѣлитъ площадь одной изъ боковыхъ граней въ отношеніи $m:n=2:3$ (считая отъ основанія). Площадь основанія призмы $B=75$ кв. фут. Опредѣлить площадь сѣченія.

259. Плоскость, проведенная параллельно основанію пирамиды, дѣлитъ ея высоту въ отношеніи $m:n=3:4$ (считая отъ вершины). Опредѣлить площадь основанія пирамиды, если извѣстно, что она больше площади сѣченія на $M=40$ кв. см.

260. Правильная восьмиугольная пирамида, сторона основанія которой равна $a=6$ см., пересѣчена плоскостью, параллельной основанію и проходящей черезъ средину высоты пирамиды. Опредѣлить площадь полученнаго сѣченія.

261. Высоты двухъ пирамидъ одинаковы. Площади основаній этихъ пирамидъ соотвѣтственно равны 120 кв. м. и 180 кв. м. и лежатъ въ одной плоскости. Опредѣлить площадь сѣченія второй изъ этихъ пирамидъ плоскостью, параллельной основанію, если площадь сѣченія той же плоскостью первой пирамиды равна 70 кв. м.

262. Пирамида съ квадратнымъ основаніемъ и пирамида, въ основаніи которой лежитъ правильный шестиугольникъ, имѣютъ одинаковую высоту, равную 14 метр., а основанія ихъ лежатъ въ одной плоскости. На разстояніи 6 метр. отъ вершины одной изъ пирамидъ, параллельно ея основанію, проведена плоскость, пересѣкающая данныя пирамиды. Опредѣлить каждую изъ площадей сѣченія, если стороны основаній этихъ пирамидъ соотвѣтственно равны 9 м. и 7 м.

Различныя сѣченія пирамидъ плоскостями.

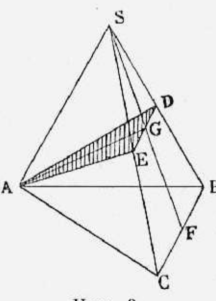
Въ условіяхъ задачъ этого отдѣла сѣкущая плоскость проводится непараллельно плоскости основанія пирамиды.

При всякихъ (изъ указанныхъ въ задачахъ) положеніяхъ сѣкущей плоскости слѣдуетъ, разсмотрѣвъ чертежъ, выяснить видъ полученной въ сѣченіи фигуры и, принявъ во вниманіе данныя задачи, найти связь ихъ съ элементами этого сѣченія.

Рѣшимъ слѣдующую задачу.

Въ треугольной пирамидѣ, всѣ ребра которой одинаковы и равны a, проведена плоскость черезъ одну изъ вершинъ пирамиды, перпендикулярно противоположной грани, такъ, что въ сѣченіи образовался равнобедренный треугольникъ. Опредѣлить площадь этого сѣченія.

Пусть $SABC$ — данная пирамида, а ADE — сѣченіе этой пирамиды плоскостью, проходящей черезъ вершину A перпендикулярно противоположной грани CSB. Нетрудно видѣть, что сѣченіе ADE будетъ имѣть видъ равнобедреннаго треугольника только въ томъ случаѣ, когда оно, проходя черезъ прямую AG, перпендикулярную къ грани CSB, пересѣчетъ эту грань по прямой DE, параллельной ребру BC. Для опредѣленія площади полученнаго въ сѣченіи треугольника ADE необходимо вычислить величину отрѣзковъ DE и AG, послѣ чего площадь этого треугольника выразится въ видѣ: $\frac{DE \cdot AG}{2}$. Замѣтивъ,



Черт. 9.

что основаніе перпендикуляра AG (точка G) является общимъ центромъ окружности, вписанной и описанной около равносторонняго треугольника CSB, а также и точкой пересѣченія высотъ, биссектриссъ и медіанъ этого треугольника, заключаемъ, что высота (медіана) SF треугольника CSB дѣлится въ этой точкѣ въ отношеніи $SG:GF=2:1$.

Послѣ этого изъ подобія треугольниковъ CSB и ESD найдемъ, что $\frac{DE}{CB}=\frac{SG}{SF}=\frac{2}{3}$; откуда $DE=\frac{2}{3}CB=\frac{2a}{3}$.

Отрѣзокъ AG опредѣлимъ изъ прямоугольнаго треугольника AGS, найдя предварительно величину отрѣзка SG изъ пропорціи $SG:SF=$ $=2:3$, гдѣ $SF=\sqrt{CS^2-CF^2}=\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Будемъ имѣть: $SG=\frac{2}{3}SF=\frac{a\sqrt{3}}{3}$. Зная SG, опредѣлимъ AG по формулѣ $AG=\sqrt{AS^2-SG^2}=\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Найдя, что $DE=\frac{2a}{3}$, а $AG=\frac{a\sqrt{6}}{3}$, опредѣлимъ площадь треугольника сѣченія; получимъ:

$$\text{площ.} \triangle\ EAD=\frac{DE\,.\,AC}{2}=\frac{a^2\sqrt{6}}{9}\ \text{кв. ед.}$$

263. Въ правильной треугольной пирамидѣ сторона основанія $a=4$ дюйм., а боковое ребро $b=7$ дюйм. Опредѣлить площадь сѣченія, проведеннаго черезъ боковое ребро пирамиды и средину противоположной стороны основанія.

264. Въ правильной треугольной пирамидѣ, всѣ ребра которой одинаковы и равны каждое $a=5{,}2$ дцм., проведена плоскость черезъ вершину пирамиды такъ, что эта плоскость пересѣкаетъ основаніе по прямой, параллельной одной изъ его сторонъ и дѣлитъ это основаніе на двѣ равновеликія части. Опредѣлить площадь полученнаго сѣченія.

265. Въ правильной треугольной пирамидѣ сторона основанія $a=6$ см., а боковое ребро $b=5$ см. Черезъ средину боковаго ребра проведена плоскость, перпендикулярно основанію такъ, что она пересѣкаетъ это основаніе по прямой, параллельной противолежащей сторонѣ основанія. Опредѣлить площадь полученнаго сѣченія.

266. Въ правильной треугольной пирамидѣ боковое ребро наклонено къ плоскости основанія подъ угломъ въ 60°. Площадь сѣченія, проходящаго черезъ боковое ребро и средину противоположнаго ребра основанія, равна $Q=34$ кв. см. Опредѣлить площадь основанія.

267. Треугольная пирамида, всѣ ребра которой одинаковы и равны каждое $a=2{,}4$ дцм., пересѣчена плоскостью, проходящей черезъ одну изъ вершинъ и средины двухъ реберъ противоположной грани. Опредѣлить разстояніе вершины, въ которой сходятся разсѣченные ребра, отъ плоскости сѣченія.

268. Сторона основанія правильной треугольной пирамиды равна $a=8$ см. Черезъ сторону основанія и средину противоположнаго боковаго ребра проведена плоскость. Площадь образовавшагося сѣченія равна площади основанія пирамиды. Опредѣлить боковое ребро.

269. Въ правильной треугольной пирамидѣ боковыя ребра взаимно перпендикулярны и равны $b=4$ см. Черезъ нижній конецъ одного изъ боковыхъ реберъ проведена плоскость такъ, что она отсѣкаетъ отъ двухъ другихъ боковыхъ реберъ части $c=2$ см. и $d=3$ см. (считая отъ вершины). Опредѣлить площадь полученнаго сѣченія.

270. Въ правильной четыреугольной пирамидѣ сторона основанія $a=6$ фут., а боковое ребро $b=8$ фут. Опредѣлить площадь діагональнаго сѣченія.

271. Въ правильной четыреугольной пирамидѣ сторона основанія $a=6$ дюйм., а боковое ребро $b=5$ дюйм. Черезъ средины двухъ противоположныхъ сторонъ основанія проведена плоскость параллельно боковой грани. Опредѣлить площадь полученнаго сѣченія.

272. Въ правильной четыреугольной пирамидѣ сторона основанія $a=8$ вершк.; боковыя грани образуютъ съ плоскостью основанія углы въ 60°. Черезъ сторону основанія, перпендикулярно противолежащей боковой грани, проведена плоскость. Опредѣлить площадь полученнаго сѣченія.

273. Въ правильной четыреугольной пирамидѣ сторона основанія $a=4$ см., а апоѳема боковой грани $h=5$ см. Черезъ діагональ основанія, параллельно боковому ребру, проведена плоскость. Опредѣлить площадь образовавшагося сѣченія.

274. Въ правильной четыреугольной пирамидѣ плоскость, дѣлящая двугранный уголъ между боковой гранью и основаніемъ пирамиды пополамъ, дѣлитъ противоположную грань на части въ отношеніи $m:n=4:9$ (считая отъ основанія). Опредѣлить высоту пирамиды, если сторона основанія $a=6$ вершк.

275. Сторона основанія правильной шестиугольной пирамиды $a=4$ см., а ея высота $H=7$ см. Черезъ вершину пирамиды и меньшую діагональ основанія проведена плоскость. Опредѣлить площадь образовавшагося сѣченія.

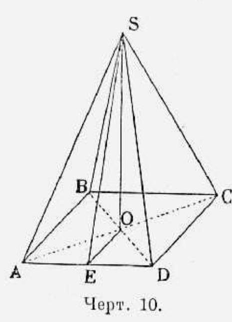
Вычисленіе различныхъ элементовъ пирамиды.

Задачи этого отдѣла полезно рѣшить, какъ упражненія, до перехода къ слѣдующему отдѣлу.

Общій пріемъ рѣшенія этихъ задачъ состоитъ въ слѣдующемъ. Выполнивъ чертежъ по условію задачи, разсматриваютъ на немъ искомый по вопросу задачи элементъ и стараются установить связь его съ данными въ задачѣ элементами; затѣмъ, примѣняя соотвѣтствующія теоремы планиметріи (главнымъ образомъ теорему Пиѳагора), выражаютъ зависимость между элементами въ видѣ уравненій изъ которыхъ опредѣляютъ искомый элементъ.

Разсмотримъ рѣшеніе слѣдующей задачи.

Въ правильной четыреугольной пирамидѣ высота H, *а апоѳема боковой грани* h. *Опредѣлить боковое ребро этой пирамиды.*



Черт. 10.

Положимъ, что $SABCD$ — данная пирамида, въ которой $SO=H$ и $SE=h$.

Боковое ребро пирамиды, напр. ребро SA, можемъ опредѣлить изъ прямоугольнаго треугольника ASE, для чего слѣдуетъ предварительно опредѣлить отрѣзокъ AE, равный половинѣ стороны квадратнаго основанія пирамиды. Замѣтивъ, что $AE=OE$, изъ прямоугольнаго треугольника ESO найдемъ: $OE=\sqrt{SE^2-SO^2}=\sqrt{h^2-H^2}$, послѣ чего опредѣлимъ AS по формулѣ: $AS=\sqrt{SE^2+AE^2}=\sqrt{SE^2+OE^2}=\sqrt{2h^2-H^2}$.

Замѣчаніе. Въ предлагаемой задачѣ ребро SA можно опредѣлить изъ послѣдовательнаго разсмотрѣнія прямоугольныхъ треугольниковъ ASO, ESO и AOE или ASO, ESO и ADC, въ которомъ AO представляетъ собой половину діагонали AC.

276. Сторона основанія правильной треугольной пирамиды $a=17{,}1$ см., а ея высота $H=5{,}7$ см. Опредѣлить боковое ребро пирамиды.

277. Высота правильной треугольной пирамиды $H=8$ фут., а боковое ребро $b=16$ фут. Опредѣлить сторону основанія.

278. Боковое ребро правильной треугольной пирамиды $b=5$ см., а апоѳема боковой грани $h=4$ см. Опредѣлить высоту пирамиды.

279. Опредѣлить сторону основанія правильной четыреугольной пирамиды, зная ея высоту $H=0{,}17$ дцм. и боковое ребро $b=0{,}33$ дцм.

280. Опредѣлить сторону основанія правильной четыреугольной пирамиды, боковое ребро которой равно 18,5 метр., а площадь боковой грани равна 105 кв. метр.

281. Боковое ребро правильной четыреугольной пирамиды $b=7$ фут., а апоѳема боковой грани $h=5$ фут. Опредѣлить высоту пирамиды.

282. Сторона основанія правильной четыреугольной пирамиды $a=12$ дюйм., а апоѳема боковой грани $h=5$ дюйм. Опредѣлить высоту пирамиды.

283. Сторона основанія правильной пятиугольной пирамиды $a=14$ см., а апаоема боковой грани $h=24$ см. Опредѣлить высоту пирамиды.

284. Сторона основанія правильной пятиугольной пирамиды $a=3$ см., а боковое ребро $b=5$ см. Опредѣлить высоту пирамиды.

285. Опредѣлить высоту правильной шестиугольной пирамиды, если извѣстно, что ея боковое ребро $b=3{,}17$ дцм., а сторона основанія $a=0{,}75$ дцм.

286. Сторона основанія правильной шестиугольной пирамиды $a=6$ дюйм., а ея высота $H=10$ дюйм. Опредѣлить боковое ребро пирамиды.

287. Опредѣлить высоту правильной десятиугольной пирамиды, сторона основанія которой $a=15$ дцм., а боковое ребро $b=5$ дцм.

288. Основаніемъ пирамиды служитъ прямоугольникъ со сторонами $a=6$ см. и $b=8$ см. Одно изъ боковыхъ реберъ перпендикулярно къ плоскости основанія и равно діагонали основанія. Опредѣлить боковыя ребра пирамиды.

289. Основаніемъ пирамиды служитъ прямоугольный треугольникъ съ катетами $a=3$ см. и $b=4$ см. Вершина пирамиды лежитъ на перпендикулярѣ, возставленномъ къ плоскости основанія изъ вершины прямого угла на разстояніи $H=1$ см. отъ основанія. Опредѣлить площадь боковой грани, основаніемъ которой служитъ гипотенуза прямоугольнаго треугольника.

290. Основаніемъ прямой пирамиды служитъ ромбъ; высота пирамиды $H=8$ дцм., а площади діагональныхъ сѣченій $M=24$ кв. дцм. и $N=32$ кв. дцм. Опредѣлить апоѳему боковой грани.

291. Стороны основанія треугольной пирамиды соотвѣтственно равны $a=5$ дюйм., $b=6$ дюйм. и $c=7$ дюйм. Опредѣлить длину боковыхъ реберъ, если извѣстно, что они взаимно-перпендикулярны.

Поверхность пирамиды.

При рѣшеніи задачъ на опредѣленіе поверхности пирамиды условимся въ слѣдующихъ обозначеніяхъ: $S_б$ — боковая поверхность пирамиды; S — ея полная поверхность; H — высота пирамиды; h — апоѳема ея боковой грани; P и B соотвѣтственно периметръ и площадь многоугольника основанія пирамиды.

При опредѣленіи боковой поверхности правильной пирамиды примѣняется теорема:

Боковая поверхность правильной пирамиды равна периметру многоугольника ея основанія, умноженному на половину апоѳемы боковой грани; т.-е. $S_б=\frac{Ph}{2}$.

Что же касается вычисленія боковой поверхности неправильной пирамиды, то указанія по этому поводу сдѣланы ранѣе.

Для опредѣленія полной поверхности пирамиды (правильной или неправильной) слѣдуетъ къ боковой ея поверхности прибавить площадь многоугольника основанія; получимъ

$$S=S_б+B.$$

Поверхность правильной треугольной пирамиды.

Обозначая сторону основанія правильной треугольной пирамиды черезъ a и примѣняя вышеуказанную теорему, будемъ имѣть:

$$S_б=\frac{3ah}{2}, \text{ а } S=S_б+B=\frac{a}{4}(6h+a\sqrt{3}).$$

292. Сторона основанія правильной треугольной пирамиды $a=15$ см., а апоѳема боковой грани $h=20$ см. Опредѣлить поверхность пирамиды.

293. Опредѣлить высоту правильной треугольной пирамиды, если боковая поверхность ея $S_б=6$ кв. м., а сторона основанія $a=2$ м.

294. Боковое ребро правильной треугольной пирамиды $b=13$ см., а апоѳема боковой грани $h=12$ см. Опредѣлить поверхность пирамиды.

295. Сторона основанія правильной треугольной пирамиды $a=6$ см., а высота пирамиды $H=8$ см. Опредѣлить апоѳему боковой грани и поверхность пирамиды.

296. Высота правильной треугольной пирамиды $H=9$ см., а боковое ребро $b=15$ см. Опредѣлить боковую поверхность этой пирамиды.

297. Боковое ребро правильной треугольной пирамиды $b=1{,}16$ дцм., а сторона основанія $a=0{,}84$ дцм. Опредѣлить высоту и поверхность этой пирамиды.

298. Сторона основанія правильной треугольной пирамиды $a=\frac{2}{3}$ м. Опредѣлить апоѳему боковой грани и высоту этой пирамиды, если ея поверхность $S=5{,}625$ кв. м.

299. Опредѣлить поверхность правильной треугольной пирамиды по ея высотѣ $H=1$ фут. и апоѳемѣ боковой грани $h=1\frac{2}{3}$ фут.

300. Опредѣлить поверхность правильной треугольной пирамиды, если площадь ея основанія $B=83$ кв. дцм., а высота $H=65$ дцм.

301. Боковая поверхность правильной треугольной пирамиды $S_б=72$ кв. дюйм., а апоѳема боковой грани $h=8$ дюйм. Опредѣлить высоту пирамиды и боковое ребро.

302. Боковая поверхность правильной треугольной пирамиды $S_б=648$ кв. дюйм., а высота пирамиды $H=6$ дюйм. Опредѣлить сторону основанія.

303. Опредѣлить поверхность правильной треугольной пирамиды, боковое ребро которой $b=3$ метр., а площадь боковой грани $Q=4{,}32$ кв. метр.

304. Боковая поверхность правильной треугольной пирамиды $S_б=72$ кв. фут., а боковое ребро $b=5$ фут. Опредѣлить сторону основанія пирамиды.

Поверхность правильной многоугольной пирамиды.

Поверхность многоугольной пирамиды опредѣляется на основаніи соображеній, высказанныхъ передъ задачами на опредѣленіе поверхности правильной треугольной пирамиды.

305. Поверхность правильной четыреугольной пирамиды $S=56{,}25$ кв. дцм., а сторона основанія $a=2{,}5$ дцм. Опредѣлить апоѳему боковой грани.

306a. Боковое ребро правильной четыреугольной пирамиды $b=4{,}8$ фут., а сторона основанія $a=1{,}5$ фут. Опредѣлить высоту и поверхность этой пирамиды.

306b. Опредѣлить поверхность правильной четыреугольной пирамиды, каждое изъ реберъ которой равно $a=8{,}8$ фут.

307. Боковое ребро правильной четыреугольной пирамиды $b=26$ фут., а апоѳема боковой грани $h=24$ фут. Опредѣлить боковую поверхность пирамиды.

308. Опредѣлить поверхность правильной четыреугольной пирамиды, если сторона ея основанія $a=15$ дцм., а апоѳема боковой грани $h=13$ дцм.

309. Опредѣлить сторону основанія правильной четыреугольной пирамиды, если высота ея $H=2{,}4$ дцм., а поверхность $S=14{,}4$ кв. дцм.

310. Сторона основанія правильной четыреугольной пирамиды $a=4$ дюйм., а ея высота $H=7$ дюйм. Опредѣлить поверхность пирамиды.

311. Высота правильной четыреугольной пирамиды $H=5$ дюйм., а боковое ребро $b=13$ дюйм. Опредѣлить поверхность пирамиды.

312. Опредѣлить боковое ребро правильной четыреугольной пирамиды, если ея полная поверхность $S=584$ кв. дюйм., а боковая $S_б=240$ кв. дюйм.

313. Опредѣлить поверхность правильной четыреугольной пирамиды, если извѣстно, что ея боковое ребро, равное діагонали основанія, равно $d=10$ дцм.

314а. Поверхность правильной четыреугольной пирамиды $S=$ $=17{,}075$ кв. метр. Опредѣлить длину ребра этой пирамиды, если извѣстно, что всѣ ребра ея равны между собой.

314b. Поверхность правильной четыреугольной пирамиды $S=$ $=128{,}08$ кв. дцм. Опредѣлить длину высоты этой пирамиды, если эта высота въ $n=2$ раза больше стороны основанія.

315. Поверхность правильной четыреугольной пирамиды $S=$ $=153{,}69$ кв. м.; длина бокового ребра этой пирамиды относится къ длинѣ стороны ея основанія, какъ $m:n=5:6$. Опредѣлить боковое ребро пирамиды.

316. Опредѣлить высоту правильной четыреугольной пирамиды, если поверхность ея $S=2$ кв. фута, а радіусъ окружности, описанной около основанія $R=0{,}25$ фута.

317b. Сторона основанія правильной пятиугольной пирамиды $a=$ $=6$ см., а боковое ребро $b=5$ см. Опредѣлить боковую поверхность пирамиды.

317в. Опредѣлить поверхность правильной пятиугольной пирамиды, каждое изъ реберъ которой равно $a=4$ фута.

318. Сторона основанія правильной пятиугольной пирамиды $a=$ $=20{,}5$ см., а ея высота $H=22{,}5$ см. Опредѣлить боковую поверхность пирамиды.

319. Опредѣлить боковую поверхность правильной пятиугольной пирамиды, если длина ея бокового ребра $b=2{,}6$ дцм., а апоѳема боковой грани $h=2{,}4$ дцм.

320. Сторона основанія правильной пятиугольной пирамиды $a=$ $=8$ фут., а боковая поверхность $S_б=120$ кв. фут. Опредѣлить апоѳему боковой грани и высоту пирамиды.

321. Боковыя грани правильной пятиугольной пирамиды представляютъ собой правильные треугольники. Опредѣлить поверхность этой пирамиды, если извѣстно, что радіусъ окружности, описанной около многоугольника основанія, равенъ $R=6$ фут.

322. Боковая поверхность правильной пятиугольной пирамиды $S_б=60$ кв. дцм., а боковое ребро $b=5$ дцм. Опредѣлить сторону основанія и высоту пирамиды.

323. Опредѣлить поверхность правильной шестиугольной пирамиды, зная, что высота ея $H=7{,}5$ см., а сторона основанія $a=1{,}5$ см.

324. Боковое ребро правильной шестиугольной пирамиды $b=5$ см., а сторона основанія $a=8$ см. Опредѣлить поверхность пирамиды.

325. Опредѣлить высоту правильной шестиугольной пирамиды, боковое ребро которой равна 8,5 дцм., а боковая поверхность равна 180 кв. дцм.

326. Опредѣлить высоту правильной шестиугольной пирамиды, сторона основанія которой равна 3 метр., а боковая поверхность въ 10 разъ больше площади основанія.

327. Опредѣлить поверхность правильной шестиугольной пирамиды, если ея высота $H=7{,}4$ фут., а апоѳема боковой грани $h=10{,}6$ фут.

328. Сторона основанія правильной восьмиугольной пирамиды $a=5$ см., а высота ея $H=5$ см. Опредѣлить боковую поверхность пирамиды.

329. Сторона основанія правильной десятиугольной пирамиды $a=4$ дцм., а ея высота $H=8$ дцм. Опредѣлить боковую поверхность пирамиды.

330. Опредѣлить боковую поверхность правильной десятиугольной пирамиды, если ея высота $H=6$ см., а боковое ребро $b=10$ см.

Поверхность неправильной пирамиды.

Пирамида называется неправильной, если въ основаніи ея лежитъ неправильный многоугольникъ, или же, если основаніемъ ея служитъ правильный многоугольникъ, но высота не проходитъ черезъ центръ этого многоугольника.

При вычисленіи поверхности неправильной пирамиды приходится опредѣлять отдѣльно площадь каждой изъ ея боковыхъ граней и, складывая эти площади, получать боковую поверхность;

для опредѣленія полной поверхности такой пирамиды слѣдуетъ, какъ это уже указывалось выше, прибавить площадь многоугольника основанія пирамиды.

331. Основаніемъ пирамиды служитъ треугольникъ со сторонами $a=5$ дцм., $b=7$ дцм. и $c=6$ дцм. Боковыя ребра пирамиды одинаковы и равны $d=8$ дцм. Опредѣлить боковую поверхность пирамиды.

332. Основаніемъ пирамиды служитъ треугольникъ съ сторонами $a=13$ фут., $b=20$ фут. и $c=21$ фут. Высота пирамиды $H=\frac{4}{3}\sqrt{30}$ фут., а апоѳемы боковыхъ граней одинаковы. Опредѣлить поверхность пирамиды.

333. Опредѣлить боковую поверхность пирамиды, основаніемъ которой служитъ прямоугольникъ съ площадью $B=240$ кв. см. и отношеніемъ сторонъ $m:n=5:12$, если высота пирамиды, равная $H=9$ см. проходитъ черезъ точку пересѣченія діагоналей основанія.

334. Основаніемъ пирамиды служитъ прямоугольникъ, стороны котораго $a=6$ см. и $b=8$ см. Боковыя ребра одинаковы и равны діагонали прямоугольника. Опредѣлить поверхность пирамиды.

335. Основаніемъ пирамиды служитъ ромбъ со стороной $a=10$ вершк. и одной изъ діагоналей $d=12$ вершк. Высота пирамиды проходитъ черезъ точку пересѣченія діагоналей и равна $H=15$ вершк. Опредѣлить боковую поверхность пирамиды.

336. Основаніемъ пирамиды служитъ параллелограммъ со сторонами $a=4$ дюйм. и $b=6$ дюйм. и острымъ угломъ въ $60°$. Высота пирамиды проходитъ черезъ точку пересѣченія діагоналей и равна $H=8$ дюйм. Опредѣлить боковую поверхность пирамиды.

337. Основаніемъ пирамиды служитъ правильный треугольникъ со стороной $a=6$ дюйм. Одно изъ боковыхъ реберъ перпендикулярно къ плоскости основанія, а одна изъ граней образуетъ съ плоскостью основанія уголъ въ $45°$. Опредѣлить поверхность пирамиды.

338. Основаніемъ пирамиды служитъ прямоугольный треугольникъ съ катетами $a=5$ фут. и $b=12$ фут. Одно изъ боковыхъ реберъ, проходящее черезъ вершину меньшаго остраго угла основанія, перпендикулярно къ плоскости основанія и равно $c=9$ фут. Опредѣлить боковую поверхность пирамиды.

339. Основаніемъ пирамиды служитъ прямоугольный треугольникъ съ катетами $a=3$ см. и $b=4$ см. Вершина пирамиды находится на перпендикулярѣ, возставленномъ изъ вершины прямого угла

къ плоскости основанія и отстоитъ отъ наиболѣе удаленнаго конца гипотенузы основанія на разстояніи, равномъ длинѣ гипотенузы. Опредѣлить поверхность пирамиды.

340. Основаніемъ пирамиды служитъ квадратъ со стороной $a=4$ см. Одна изъ боковыхъ граней представляетъ правильный треугольникъ и перпендикулярна къ плоскости основанія. Опредѣлить боковую поверхность пирамиды.

341. Основаніемъ пирамиды служитъ ромбъ, сторона котораго 3 дцм., а одинъ изъ угловъ $120°$. Одно изъ боковыхъ реберъ пирамиды, проходящее черезъ вершину тупого угла ромба, перпендикулярно къ плоскости основанія и равно 10,5 дцм. Опредѣлить поверхность этой пирамиды.

342. Основаніемъ пирамиды служитъ ромбъ, діагонали котораго $d_1=6$ фут. и $d_2=8$ фут. Боковое ребро, проходящее черезъ вершину остраго угла, перпендикулярно къ плоскости основанія и равно $b=10$ фут. Опредѣлить боковую поверхность пирамиды.

343. Основаніемъ пирамиды служитъ равнобедренная трапеція, параллельныя стороны которой $a=1{,}4$ см. и $c=5$ см., а боковая сторона $b=3$ см. Высота пирамиды проходитъ черезъ точку пересѣченія діагоналей и равна $H=2$ см. Опредѣлить боковую поверхность пирамиды.

344. Основаніемъ пирамиды служитъ равнобедренная трапеція, параллельныя стороны которой $a=25$ см. и $c=7$ см., а боковая сторона $b=15$ см. Высота пирамиды проходитъ черезъ конецъ большей стороны трапеціи и равна ея боковой сторонѣ. Опредѣлить боковую поверхность пирамиды.

Объемъ призмы.

Объемъ куба.

Обозначивъ объемъ куба черезъ V, а его ребро черезъ a, выразимъ объемъ куба формулой:

$$V=a^3.$$

Кромѣ того, при рѣшеніи нѣкоторыхъ задачъ полезно помнить, что объемы кубовъ относятся между собой, какъ кубы ихъ реберъ.

345. Ребро куба равно $a=5$ см. Опредѣлить объемъ куба.

345а. Периметръ грани куба равенъ $p=12$ дюйм. Опредѣлить объемъ куба.

346. Сумма всѣхъ реберъ куба равна $m=24$ дцм. Опредѣлить объемъ куба.

346а. Площадь грани куба равна $S=49$ кв. вершк. Опредѣлить объемъ куба.

347. Діагональ куба $d=3\sqrt{2}$ см. Опредѣлить объемъ куба.

347а. Поверхность куба $S=73{,}5$ кв. дюйм. Опредѣлить объемъ куба.

348. Площадь діагональнаго сѣченія куба равна $s=16\sqrt{2}$ кв. см. Опредѣлить объемъ куба.

349. Длина ребра куба $a=7{,}24$ см. Опредѣлить длину ребра куба, объемъ котораго вдвое больше объема перваго.

350. Опредѣлить длину ребра куба, объемъ котораго относится къ объему другого куба, какъ $m:n=3:8$, если извѣстно, что ребро второго куба $a=10$ дцм.

351. Поверхность одного куба $S=22{,}88$ кв. ф., а другого $S_1=64{,}98$ кв. ф. Опредѣлить отношеніе объемовъ этихъ кубовъ.

352. Сумма поверхностей двухъ кубовъ равна $S=174$ кв. см., а ребра этихъ кубовъ относятся между собой, какъ $m:n=5:2$. Опредѣлить объемы кубовъ.

353. Если ребро куба увеличить на $m=1\frac{1}{2}$ дцм., то его поверхность увеличится на $s=58{,}5$ кв. дцм. Опредѣлить объемъ этого куба.

354. Объемъ куба равенъ $V=125$ кб. фут. Опредѣлить поверхность куба.

354а. Объемы двухъ кубовъ относятся между собой, какъ $m:n=2:3$. Опредѣлить отношеніе реберъ этихъ кубовъ.

355. Опредѣлить объемъ куба, поверхность котораго равна поверхности прямоугольнаго параллелепипеда, если извѣстно, что измѣренія этого параллелепипеда соотвѣтственно равны $a=4$ м., $b=5$ м. и $c=9$ м.

356. Ребра трехъ данныхъ кубовъ соотвѣтственно равны: $a=3$ дцм., $b=4$ дцм. и $c=5$ дцм. Опредѣлить ребро и поверхность куба, объемъ котораго равенъ суммѣ объемовъ трехъ данныхъ кубовъ.

357. Сумма реберъ двухъ кубовъ равна 6 фут.; сумма объемовъ этихъ кубовъ равна 58,5 кб. фут. Опредѣлить длину реберъ каждаго куба.

358. Опредѣлить длину реберъ каждаго изъ двухъ кубовъ, если извѣстно, что разность объемовъ этихъ кубовъ $m=999$ куб. фут., а разность длинъ реберъ кубовъ $n=3$ фут.

359. Ребро одного куба равно діагонали другого. Опредѣлить отношеніе объемовъ кубовъ.

Объемъ параллелепипеда.

При рѣшеніи нѣкоторыхъ изъ нижеприводимыхъ задачъ примѣняются теоремы:

1. Объемы прямоугольныхъ параллелепипедовъ, имѣющихъ равныя площади основаній, относятся, какъ высоты.

2. Объемы прямоугольныхъ параллелепипедовъ, имѣющихъ равныя высоты, относятся, какъ площади основаній.

3. Объемы прямоугольныхъ параллелепипедовъ, имѣющихъ разныя площади основаній и разныя высоты, относятся какъ произведенія площадей основаній на высоты.

Ниже приведены задачи на опредѣленіе объемовъ прямоугольнаго и прямого параллелепипеда.

Объемъ каждаго изъ этихъ параллелепипедовъ выражается произведеніемъ площади его основанія на боковое ребро (или, что то же, — на высоту).

Обозначивъ объемъ параллелепипеда черезъ V, площадь основанія параллелепипеда черезъ B, а его высоту (иначе — боковое ребро) черезъ H, будемъ имѣть:

$$V=B.H.$$

Если въ основаніи параллелепипеда лежитъ прямоугольникъ, стороны котораго, положимъ, будутъ a и b, то формула, выражающая его объемъ, приметъ видъ

$$V=ab.H.$$

Если $a=b$, т.-е. основаніемъ параллелепипеда служитъ квадратъ со стороной a, то объемъ такого параллелепипеда выразится формулой

$$V=a^2H.$$

Наконецъ, если основаніемъ параллелепипеда служитъ параллелограммъ или ромбъ, то при опредѣленіи объема этого параллелепипеда, площадь его основанія не можетъ быть вычислена непосредственно, а опредѣляется въ зависимости отъ данныхъ задачи.

360. Въ прямоугольномъ параллелепипедѣ съ квадратнымъ основаніемъ сторона основанія равна $a=5$ см., а высота параллелепипеда $H=8$ см. Опредѣлить объемъ параллелепипеда.

361. Въ прямоугольномъ параллелепипедѣ съ квадратнымъ основанiемъ сторона основанiя $a=4$ дюйма, а боковая поверхность $S_б=$ $=28$ кв. дюйм. Опредѣлить объемъ параллелепипеда.

362. Полная поверхность прямоугольнаго параллелепипеда съ квадратнымъ основанiемъ равна $S=17,36$ кв. фута, а сторона основанiя $a=2,8$ фута. Опредѣлить объемъ параллелепипеда.

363. Площадь основанiя K одного изъ равновеликихъ параллелепипедовъ равна 38,74 кв. м., площадь другого $K_1=5,31$ кв. м. Опредѣлить отношенiе высотъ этихъ параллелепипедовъ.

364. Объемъ прямоугольнаго параллелепипеда съ квадратнымъ основанiемъ равенъ $V=131,25$ кб. дцм., а сторона основанiя $a=$ $=4,5$ дцм. Опредѣлить поверхность параллелепипеда.

365. Объемъ прямоугольнаго параллелепипеда съ квадратнымъ основанiемъ равенъ $V=57$ кб. дюйм., а его боковая поверхность $S_б=76$ кв. дюйм. Опредѣлить сторону основанiя параллелепипеда.

366. Полная поверхность параллелепипеда съ квадратнымъ основанiемъ равна $S=234$ кв. арш., а его боковая поверхность равна $S_б=102$ кв. арш. Опредѣлить объемъ параллелепипеда.

367. Объемъ прямоугольнаго параллелепипеда съ квадратнымъ основанiемъ равенъ $V=30$ кб. метр., а сторона основанiя равна $a=4$ метр. Опредѣлить полную поверхность параллелепипеда.

368. Полная поверхность прямоугольнаго параллелепипеда съ квадратнымъ основанiемъ равна $S=434$ кв. вершк., а высота параллелепипеда $H=12$ вершк. Опредѣлить объемъ параллелепипеда.

369. Въ прямоугольномъ параллелепипедѣ съ квадратнымъ основанiемъ дiагональ основанiя $d=5$ см., а дiагональ параллелепипеда $D=13$ см. Опредѣлить объемъ параллелепипеда.

370. Дiагональ прямоугольнаго параллелепипеда съ квадратнымъ основанiемъ равна $D=13$ см., а площадь дiагональнаго сѣченiя равна $S=60$ кв. см. Опредѣлить объемъ параллелепипеда.

371. Измѣренiя прямоугольнаго параллелепипеда равны соотвѣтственно $a=3$ см., $b=4$ см. и $c=6$ см. Опредѣлить объемъ параллелепипеда.

372. Объемъ прямоугольнаго параллелепипеда $V=400$ кб. см., а площади двухъ его граней соотвѣтственно равны $B=40$ кв. см. и $B_1=50$ кв. см. Опредѣлить измѣренiя параллелепипеда.

373. Площади трехъ различныхъ граней прямоугольнаго параллелепипеда соотвѣтственно равны: $B=12$ кв. дюйм., $B_1=18$ кв. дюйм. и $B_2=25$ кв. дюйм. Опредѣлить объемъ параллелепипеда.

374. Объемъ прямоугольнаго параллелепипеда V. Опредѣлить его измѣренiя, если они относятся, какъ $m:n:p$.

375. Измѣренiя одного прямоугольнаго параллелепипеда a, b и c, а другого a_1, b_1 и c_1. Опредѣлить отношенiе полныхъ поверхностей и объемовъ этихъ параллелепипедовъ.

376. Объемъ прямоугольнаго параллелепипеда $V=280$ кб. дюйм., а два изъ его измѣренiй равны соотвѣтственно $a=7$ дюйм., и $b=1$ дюйм. Опредѣлить длину дiагонали параллелепипеда.

377. Основанiе прямоугольнаго параллелепипеда — прямоугольникъ, одна изъ сторонъ котораго $a=5$ дюйм., высота параллелепипеда $H=8$ дюйм., а его боковая поверхность $S_б=176$ кв. дюйм. Опредѣлить объемъ параллелепипеда.

378. Основанiе прямоугольнаго параллелепипеда — прямоугольникъ, одна изъ сторонъ котораго $a=6,7$ фут., высота параллелепипеда $H=5,25$ фут., а его объемъ $V=221,59$ кб. фут. Опредѣлить полную поверхность параллелепипеда.

379. Опредѣлить объемъ прямоугольнаго параллелепипеда, въ которомъ основанiе — прямоугольникъ со сторонами $a=3$ см. и $b=4$ см., а полная поверхность $S=108$ кв. см.

380. Объемъ прямоугольнаго параллелепипеда $V=604$ кб. дцм., боковая поверхность $S_б=270$ кв. дцм., а площадь основанiя $B=56$ кв. дцм. Опредѣлить измѣренiя параллелепипеда.

381. Объемъ прямоугольнаго параллелепипеда $V=1800$ кб. дюйм., полная поверхность $S=900$ кв. дюйм., а боковая поверхность $S_б=540$ кв. дюйм. Опредѣлить измѣренiя параллелепипеда.

382. Дiагональ прямоугольнаго параллелепипеда равна D, а его измѣренiя относятся, какъ $m:n:p$. Опредѣлить объемъ параллелепипеда.

383. Дiагональ прямоугольнаго параллелепипеда, равная $D=5\sqrt{2}$ дюйм., образуетъ съ одной изъ его граней уголъ въ $30°$, а съ другой — уголъ въ $45°$. Опредѣлить объемъ параллелепипеда.

384. Длины дiагоналей трехъ различныхъ граней прямоугольнаго параллелепипеда соотвѣтственно равны: 51 см., 53 см. и $4\sqrt{85}$ см. Опредѣлить объемъ параллелепипеда.

385. Дiагональ прямоугольнаго параллелепипеда $D=37$ см., дiагональ основанiя $d=35$ см., а одна изъ сторонъ основанiя равна $a=21$ см. Опредѣлить объемъ параллелепипеда.

386. Стороны основанія прямоугольнаго параллелепипеда относятся, какъ $m:n=3:4$, а діагональное сѣченіе представляетъ собой квадратъ, площадь котораго $s=100$ кв. см. Опредѣлить объемъ параллелепипеда.

387. Измѣренія одного прямоугольнаго параллелепипеда относятся между собой, какъ $3:5:6$, а измѣренія другого — какъ $2:3:5$. Опредѣлить отношеніе поверхностей этихъ параллелепипедовъ, если извѣстно, что объемъ перваго въ шесть разъ болѣе объема второго.

388. Высота прямого параллелепипеда $H=7,5$ см., а основаніе — ромбъ со стороной $a=5$ см. и одной изъ діагоналей $d=6$ см. Опредѣлить объемъ параллелепипеда.

389. Основаніе прямого параллелепипеда — ромбъ, сторона котораго $a=5$ дцм., а одна изъ діагоналей $d=8$ дцм,; объемъ параллелепипеда $V=192$ куб. дцм. Опредѣлить боковую поверхность параллелепипеда.

390. Основаніе прямого параллелепипеда — ромбъ со стороной $a=13$ фут., высота параллелепипеда $H=10$ фут., а полная поверхность $S=760$ кв. фут. Опредѣлить объемъ параллелепипеда.

391. Основаніе прямого параллелепипеда — ромбъ со стороной $a=10$ см., и площадью $B=96$ кв. см.; объемъ параллелепипеда $V=1056$ кб. см. Опредѣлить діагонали параллелепипеда.

392. Объемъ прямого параллелепипеда 960 кб. метр., полная поверхность 656 кв. метр., а боковая поверхность 416 кв. метр. Опредѣлить сторону и діагонали основанія, если извѣстно, что основаніе представляетъ собой — ромбъ.

393. Опредѣлить объемъ прямого параллелепипеда, у котораго основаніе ромбъ съ площадью $B=25$ кв. дцм., а площади діагональныхъ сѣченій, проходящихъ черезъ боковыя ребра, равны соотвѣтственно $B_1=36$ кв. дцм. и $B_2=40,5$ кв. дцм.

394. Основаніе параллелепипеда — параллелограммъ, сторона котораго $a=20$ см. и $b=13$ см., а одна изъ діагоналей основанія $d=21$ см. Опредѣлить объемъ параллелепипеда, если высота его $H=10$ см.

395. Въ прямомъ параллелепипедѣ основаніе параллелограммъ со сторонами $a=25$ дюйм. и $b=13$ дюйм., а одна изъ діагоналей основанія $d=17$ дюйм. Опредѣлить объемъ параллелепипеда, если его боковая поверхность $S_б=912$ кв. дюйм.

396. Основаніе прямого параллелепипеда — параллелограммъ, стороны котораго $a=13$ дюйм. и $b=18$ дюйм., а площадь основанія $B=180$ кв. дюйм. Опредѣлить боковую поверхность параллелепипеда, если его объемъ $V=720$ куб. дюйм.

397. Площади трехъ различныхъ граней прямого параллелепипеда относятся между собой, какъ $m:n:p$. Опредѣлить отношеніе реберъ параллелепипеда.

398. Въ прямомъ параллелепипедѣ одна изъ сторонъ основанія $a=7$ см., а площадь сѣченія, перпендикулярнаго къ этой сторонѣ, равна $Q=60$ кв. см. Опредѣлить объемъ параллелепипеда.

399. Объемъ прямого параллелепипеда $V=672$ кб. см., высота его $H=14$ см., а стороны основанія: $a=10$ см. и $b=8$ см. Опредѣлить площади діагональныхъ сѣченій параллелепипеда.

400. Опредѣлить объемъ прямого параллелепипеда, въ которомъ стороны основанія $a=8$ см. и $b=12$ см. образуютъ уголъ въ 150°, а боковая поверхность $S_б=210$ кв. см.

401. Въ прямомъ параллелепипедѣ стороны основанія $a=7,5$ см. и $b=4$ см. образуютъ между собой уголъ въ 120°, а проекція меньшей діагонали параллелепипеда на плоскость его основанія равна половинѣ этой діагонали. Опредѣлить объемъ параллелепипеда.

Объемъ наклоннаго параллелепипеда.

Опредѣленіе объема наклоннаго параллелепипеда основывается на теоремѣ:

Всякій наклонный параллелепипедъ равновеликъ прямому, имѣющему съ нимъ общее основаніе и одинаковую высоту.

Такимъ образомъ, объемъ наклоннаго параллелепипеда выразится формулой

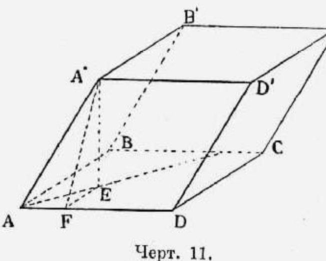
$$V=B.H.$$

Наибольшую трудность при рѣшеніи нижеприводимой группы задачъ представляетъ опредѣленіе высоты параллелепипеда, тогда какъ площадь основанія въ большинствѣ случаевъ опредѣляется достаточно просто. Чаще всего эта высота можетъ быть вычислена или въ зависимости отъ величины угла, образованнаго боковымъ ребромъ съ плоскостью основанія параллелепипеда или въ зависимости отъ величины угловъ, образованныхъ боковымъ ребромъ со сторонами основанія параллелепипеда.

Разсмотримъ рѣшеніе слѣдующей задачи.

Основаніемъ наклоннаго параллелепипеда служитъ прямоугольникъ со сторонами **a** *и* **b**; *одно изъ боковыхъ реберъ образуетъ съ прилежащими къ нему сторонами основанія углы, каждый изъ которыхъ равенъ 60°. Опредѣлить объемъ этого параллелепипеда, если его боковое ребро равно* **c**.

Пусть $ABCDA'B'C'D'$ — данный параллелепипедъ, въ которомъ основаніе $ABCD$ — прямоугольникъ со сторонами $AB=$ $=DC=a$ и $BC=AD=b$, а боковое ребро AA', равное c, наклонено къ сторонамъ AB и AD основанія подъ углами въ 60°.



Черт. 11.

Для выраженія объема даннаго параллелепипеда имѣемъ формулу $V=abH$; разсмотрѣвъ ее и принявъ во вниманіе данныя задачи, заключаемъ, что искомой величиной является высота H параллелепипеда, которая опредѣлится въ зависимости отъ величины бокового ребра. Проведемъ высоту $A'E$ черезъ вершину A' параллелепипеда и соединимъ точки A и E. Изъ полученнаго прямоугольнаго треугольника $A'EA$ высота $A'E$ можетъ быть опредѣлена, если катетъ AE будетъ извѣстенъ; такъ какъ AE представляетъ собой проекцію бокового ребра AA' на плоскость основанія, и такъ какъ это ребро наклонено къ сторонамъ AB и AD основанія подъ одинаковыми углами, то эта проекція будетъ служить биссектриссой прямого угла BAD, вслѣдствіе чего углы BAE и EAD равны каждый 45°.

Опустивъ изъ точки E перпендикуляръ EF на сторону AD основанія и соединивъ точку F съ точкой A', найдемъ, что въ прямоугольномъ треугольникѣ AEF стороны AF и EF равны между собой, и что треугольникъ $A'FA$ — прямоугольный, при чемъ уголъ FAA' равенъ 60°, уголъ $AA'F$ равенъ 30°, а, слѣдовательно, въ прямоугольномъ треугольникѣ $A'FA$ катетъ $A'F=\frac{AA'}{2}=\frac{c}{2}$; а въ равнобедренномъ прямоугольномъ треугольникѣ AFE гипотенуза $AE=\frac{AF\sqrt{2}}{2}=\frac{c\sqrt{2}}{2}$; зная AE, найдемъ высоту $A'E$ по формулѣ:

$$A'E=H=\sqrt{AA_1^2-AE^2}=\sqrt{c^2-\left(\frac{c\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\frac{c\sqrt{2}}{2}.$$

Такимъ образомъ искомый объемъ даннаго наклоннаго параллелепипеда выразится въ видѣ: $V=\frac{abc\sqrt{2}}{2}$.

Замѣчаніе. Для ясности зрительнаго впечатлѣнія, получаемаго при разсматриваніи чертежа, слѣдуетъ, выполняя чертежъ, обводить контуръ передней грани параллелепипеда болѣе толстой линіей.

402. Въ наклонномъ параллелепипедѣ съ квадратнымъ основаніемъ сторона основанія $a=3$ дюйм., боковое ребро $b=5$ дюйм., а одна изъ боковыхъ граней наклонена къ плоскости основанія подъ угломъ въ 30°. Опредѣлить объемъ параллелепипеда.

403. Стороны основанія параллелепипеда равны соотвѣтственно $a=5$ см. и $b=7$ см. и составляютъ другъ съ другомъ уголъ въ 45°, а боковое ребро, равное $c=8$ см., составляетъ съ плоскостью основанія уголъ въ 45°. Опредѣлить объемъ этого параллелепипеда.

404. Опредѣлить объемъ наклоннаго параллелепипеда, въ которомъ стороны основанія $a=8$ дюйм. и $b=11$ дюйм. образуютъ между собой уголъ въ 60°, а боковое ребро $c=3\sqrt{6}$ дюйм. образуетъ съ плоскостью основанія уголъ въ 45°.

405. Опредѣлить объемъ наклоннаго параллелепипеда, въ которомъ стороны основанія $a=5$ дцм. и $b=4$ дцм. составляютъ между собой уголъ въ 60°, а боковое ребро $c=2\sqrt{2}$ дцм. образуетъ съ плоскостью основанія уголъ въ 45°.

406. Опредѣлить объемъ наклоннаго параллелепипеда, въ которомъ стороны основанія $a=7$ см. и $b=8$ см. составляютъ между собой уголъ въ 45°, а боковое ребро $c=3\sqrt{6}$ см. образуетъ съ плоскостью основанія уголъ въ 60°.

407. Опредѣлить объемъ наклоннаго параллелепипеда, въ которомъ ребра, выходящія изъ одной вершины, равны соотвѣтственно a, b и c, и разстоянія между боковыми ребрами m, n и p.

408. Опредѣлить объемъ параллелепипеда, гранями котораго служатъ ромбы съ острымъ угломъ въ 60° и стороной $a=5$ см.

409. Опредѣлить объемъ параллелепипеда, котораго основаніе прямоугольникъ со сторонами $a=3$ см. и $b=4$ см., а боковое ребро $c=6$ см. образуетъ со сторонами основанія углы въ 60°.

410. Опредѣлить объемъ параллелепипеда, въ которомъ основаніе — ромбъ со стороной $a=3$ метр. и острымъ угломъ въ $60°$, а боковое ребро $b=5$ см. образуетъ со сторонами основанія углы въ $45°$.

411. Опредѣлить объемъ параллелепипеда, въ которомъ ребра, выходящія изъ одной вершины, образуютъ между собой углы въ $45°$ и равны соотвѣтственно $a=11{,}25$ см., $b=16$ см. и $c=15$ см.

412. Опредѣлить объемъ наклоннаго параллелепипеда, въ которомъ боковое ребро, равное $a=10$ фут.; находится отъ параллельныхъ ему реберъ на разстояніяхъ $b=4$ фут., $c=15$ фут. и $d=13$ фут.

Объемъ прямой треугольной призмы.

Объемъ прямой треугольной призмы такъ же, какъ и объемъ прямого параллелепипеда, выражается произведеніемъ площади ея основанія на боковое ребро (высоту).

При вычисленіи элементовъ, необходимыхъ для опредѣленія объема прямой треугольной призмы, примѣняются тѣ же способы, что и при опредѣленіи поверхности этой призмы.

413. Основаніе прямой призмы — прямоугольный треугольникъ съ катетами $a=5$ см. и $b=12$ см.; наибольшая боковая грань — квадратъ. Опредѣлить объемъ призмы.

414. Основаніемъ прямой призмы служитъ прямоугольный треугольникъ въ которомъ отношеніе катетовъ равно $8:15$, а отношеніе гипотенузы основанія къ высотѣ призмы равно $2:1$. Опредѣлить объемъ призмы, если ея боковая поверхность равна 1360 кв. арш.

415a. Въ правильной треугольной призмѣ сторона основанія $a=8$ дцм., а высота $H=15$ дцм. Опредѣлить объемъ призмы.

415b. Въ правильной треугольной призмѣ всѣ ребра одинаковы и каждое равно a. Опредѣлить объемъ призмы.

416. Въ правильной треугольной призмѣ сторона основанія $a=4{,}5$ дюйм.; а боковая поверхность $S_б=8$ кв. дюйм. Опредѣлить объемъ призмы.

417. Высота правильной треугольной призмы $H=9$ см., а ея полная поверхность $S=216\sqrt{3}$ кв. см. Опредѣлить объемъ призмы.

418. Высота правильной треугольной призмы $H=7\sqrt{3}$ фут., а ея объемъ $V=210$ кб. фут. Опредѣлить боковую поверхность призмы.

419. Полная поверхность правильной треугольной призмы $S=28\sqrt{3}$ кв. см., а ея боковая поверхность $S_б=20\sqrt{3}$ кв. см. Опредѣлить объемъ призмы.

420. Объемъ правильной треугольной призмы $V=81\sqrt{3}$ кб. дцм., а ея боковая поверхность $S_б=162$ кв. дцм. Опредѣлить сторону основанія и боковое ребро призмы.

421. Опредѣлить объемъ правильной треугольной призмы, зная, что ея боковое ребро равно высотѣ основанія призмы, а площадь сѣченія, проходящаго черезъ высоту основанія и боковое ребро, равно $k=27$ кв. см.

422. Площадь основанія правильной треугольной призмы $B=73{,}2$ кв. см.; а діагональ боковой грани $d=20$ см. Опредѣлить объемъ призмы.

423. Основаніемъ прямой треугольной призмы служитъ равнобедренный треугольникъ, боковая сторона котораго $a=10$ см., а основаніе $b=12$ см. Опредѣлить объемъ этой призмы, если ея боковая поверхность $S_б=448$ кв. см.

424. Основаніемъ прямой призмы служитъ равнобедренный треугольникъ, боковая сторона котораго $a=13$ дюйм., а основаніе $b=10$ дюйм. Опредѣлить полную поверхность призмы, если ея объемъ $V=660$ кб. дюйм.

425. Основаніемъ прямой призмы служитъ равнобедренный треугольникъ, въ которомъ основаніе $b=6$ дцм. Опредѣлить объемъ призмы, если ея боковая поверхность $S_б=160$ кв. дцм., а площадь основанія призмы $B=12$ кв. дцм.

426. Основаніемъ прямой призмы служитъ равнобедренный треугольникъ, боковая сторона котораго $a=10$ метр. Полная поверхность призмы $S=384$ кв. метр., а боковая поверхность $S_б=288$ кв. метр. Опредѣлить объемъ призмы.

427. Основаніемъ прямой призмы служитъ треугольникъ со сторонами $a=13$ см., $b=20$ см. и $c=21$ см. Опредѣлить объемъ призмы, если высота ея $H=12$ см.

428. Основаніемъ прямой призмы служитъ треугольникъ, двѣ стороны котораго равны $a=3$ дцм. и $b=4$ дцм.; боковая поверхность призмы $S_б=42$ кв. дцм., а полная поверхность $S=54$ кв. дцм. Опредѣлить объемъ призмы.

429. Основаніемъ прямой призмы служитъ треугольникъ со сторонами $a=4$ дюйм., $b=2{,}1$ дюйм. и $c=4{,}2$ дюйм.; объемъ призмы $V=55{,}44$ кб. дюйм. Опредѣлить боковую поверхность призмы.

430. Основаніемъ прямой призмы служитъ треугольникъ, одна изъ сторонъ котораго $a=7,5$ метр., а площадь основанія $B=21$ кв. метр. Опредѣлить объемъ призмы, если ея боковая поверхность $S_б=105$ кв. метр.

431. Объемъ прямой треугольной призмы $V=840$ кв. см., ея полная поверхность $S=588$ кв. см., а высота $H=10$ см. Опредѣлить стороны основанія призмы, если одна изъ нихъ $a=15$ см.

432. Объемъ прямой треугольной призмы $V=576$ кб. фут., а высота призмы $H=12$ фут. Опредѣлить стороны основанія призмы, если площади ея боковыхъ граней относятся между собой, какъ $m:n:p=10:17:21$.

Объемъ прямой многоугольной призмы.

Объемъ прямой многоугольной призмы такъ же, какъ и объемъ прямой треугольной призмы, выражается произведеніемъ площади ея основанія на боковое ребро (высоту).

При вычисленіи элементовъ, необходимыхъ для опредѣленія объема прямой многоугольной призмы, примѣняются тѣ же способы, что и при опредѣленіи поверхности этой призмы.

433. Опредѣлить объемъ правильной пятиугольной призмы по сторонѣ основаній $a=4$ см. и боковому ребру $b=6$ см.

434. Опредѣлить объемъ правильной шестиугольной призмы по сторонѣ основанія $a=2$ фут. и боковому ребру $b=4,5$ фут.

435. Опредѣлить объемъ правильной восьмиугольной призмы по сторонѣ основанія $a=16$ дюйм. и боковому ребру $b=12$ дюйм.

436. Опредѣлить объемъ правильной десятиугольной призмы по сторонѣ основанія $a=2$ метр. и боковому ребру $b=0,4$ метр.

437. Опредѣлить объемъ правильной 12-угольной призмы по площади основанія $B=9$ кв. см., если боковое ребро равно средней по величинѣ діагонали основанія.

438. Опредѣлить объемъ прямой призмы, основаніемъ которой служитъ правильный n-угольникъ, по сторонѣ основанія a и діагонали боковой грани b; если 1) $n=5$; $a=4,72$ см. и $b=7$ см.; 2) $n=6$, $a=3,55$ метр. и $b=5,5$ метр.; 3) $n=8$; $a=4,45$ фут. и $b=6,4$ фут.; 4) $n=10$; $a=4,32$ дцм. и $b=8,1$ дцм.; 5) $n=12$; $a=1,7$ вершк. и $b=3,8$ вершк.

439. Опредѣлить объемъ прямой призмы, основаніемъ которой служитъ правильный n-угольникъ, по площади основанія B и

площади боковой грани Q, если 1) $n=5$, $B=38,6$ кв. см. и $Q=42,5$ кв. см., 2) $n=6$, $B=21,6$ кв. фут. и $Q=12,8$ кв. фут., 3) $n=8$; $B=35,6$ кв. дюйм. и $Q=11,4$ кв. дюйм., 4) $n=10$; $B=56,7$ кв. дцм. и $Q=45$ кв. дцм., 5) $n=12$; $B=49,8$ кв. арш. и $Q=30,4$ кв. арш.

440. Опредѣлить объемъ прямой призмы, основаніемъ которой служитъ правильный n-угольникъ, по боковой поверхности $S_б$ призмы и высотѣ ея H, если 1) $n=5$; $S_б=114,36$ кв. фут. и $H=5$ фут.; 2) $n=6$; $S_б=104,23$ кв. см. и $H=4$ см.; 3) $n=8$; $S_б=87,38$ кв. дюйм. и $H=6$ дюйм.; 4) $n=10$; $S_б=126,18$ кв. метр. и $H=7$ метр. 5) $n=12$; $S_б=1138,85$ кв. дцм. и $H=8$ дцм.

441. Опредѣлить объемъ прямой призмы, основаніемъ которой служитъ правильный n-угольникъ, по радіусу R окружности, описанной около основанія и площади Q боковой грани, если 1) $n=5$; $R=3,2$ см. и $Q=18,2$ кв. см.; 2) $n=6$; $R=5,8$ фут. и $Q=32,7$ кв. фут. 3) $n=8$; $R=10,5$ дюйм. и $Q=65,4$ кв. дюйм.; 4) $n=10$; $R=8,6$ дцм. и $Q=34$ кв. дцм.; 5) $n=12$; $R=12,5$ арш. и $Q=25,4$ кв. арш.

442. Опредѣлить объемъ прямой призмы, основаніемъ которой служитъ правильный n-угольникъ, по діагонали боковой грани b и радіусу r окружности, вписанной въ основаніе призмы, если 1) $n=5$; $b=54,5$ метр. и $r=18,3$ метр.; 2) $n=6$; $b=15$ дцм. и $r=4,2$ дцм.; 3) $n=8$; $b=12^1/_3$ фут. и $r=9,6$ фут.; 4) $n=10$; $b=8,4$ дюйм., и $r=5,24$ дюйм.; 5) $n=12$, $b=14,25$ арш. и $r=3,5$ арш.

443. Опредѣлить объемъ прямой призмы по ребру основанія a и боковой поверхности $S_б$, если основаніемъ призмы служитъ правильный 1) шестиугольникъ, 2) десятиугольникъ, 3) двѣнадцатиугольникъ.

444. Объемъ правильной шестиугольной призмы равенъ $V==90$ кб. см. и высота въ $n=2,5$ раза болѣе стороны основанія. Опредѣлить сторону основанія и высоту призмы.

445. Объемъ правильной шестиугольной призмы $V=9$ кб. дюйм., а высота $H=1$ дюйм. Опредѣлить сторону основанія и полную поверхность.

446. Опредѣлить объемъ правильной шестиугольной призмы, у которой сторона основанія $a=2$ метр., а площадь боковой грани равна площади основанія призмы.

447. Опредѣлить объемъ прямой призмы, основаніемъ которой служитъ правильный восьмиугольникъ, вписанный въ окружность радіуса $r=5$ см., а высота равна сторонѣ квадрата, вписаннаго въ ту же окружность.

448. Основаніемъ прямой призмы служитъ трапеція, въ которой параллельныя стороны равны 68,25 см. и 38,5 см., а непараллельныя 45,5 см. и 43,75 см. Опредѣлить объемъ призмы, если площадь сѣченія, проходящаго черезъ большую діагональ трапеціи равна 12,25 кв. см.

449. Правильная шестиугольная призма, боковое ребро которой $b=10$ см. разсѣчена діагональной плоскостью на двѣ равныя четыреугольныя призмы. Опредѣлить объемъ данной призмы, если боковая поверхность каждой изъ четыреугольныхъ призмъ $S_6=$ $=93{,}75$ кв. см.

450. Полная поверхность правильной шестиугольной призмы вдвое болѣе ея боковой поверхности. Опредѣлить объемъ этой призмы, если ея высота $H=5\sqrt{3}$ см.

451. Объемъ правильной четыреугольной призмы V. Опредѣлить объемъ правильной шестиугольной призмы, имѣющей съ первой одинаковую боковую поверхность и высоту.

452. Правильная десятиугольная призма, у которой боковой гранью служитъ квадратъ, имѣющій площадь Q, равновелика нѣкоторой призмѣ, площадь основанія которой B. Опредѣлить высоту этой призмы.

Объемъ наклонной призмы.

Объемъ всякой наклонной призмы выражается произведеніемъ площади ея основанія на высоту.

При вычисленіи объема наклонной призмы наибольшее затрудненіе въ нѣкоторыхъ случаяхъ представляетъ опредѣленіе высоты, тогда какъ площадь основанія можетъ быть опредѣлена безъ особыхъ затрудненій. Высота наклонной призмы можетъ быть найдена на основаніи соображеній, примѣняемыхъ при рѣшеніи задачъ на вычисленіе объема наклоннаго параллелепипеда.

Нѣкоторыя же задачи на опредѣленіе объема наклонной призмы рѣшаются на основаніи слѣдующей теоремы:

Наклонная призма равновелика прямой, основаніемъ которой служитъ перпендикулярное сѣченіе этой призмы, а высотой — ея боковое ребро. Поэтому объемъ наклонной призмы можетъ быть выраженъ произведеніемъ площади перпендикулярнаго сѣченія призмы на ея боковое ребро.

453. Основаніемъ призмы служитъ правильный треугольникъ со стороной $a=4$ фут., каждое изъ боковыхъ реберъ призмы равно $b=7$ фут. и наклонено къ плоскости основанія подъ угломъ въ 60°. Опредѣлить объемъ призмы.

454. Основаніемъ призмы служитъ равносторонній треугольникъ со стороной $a=3$ см. Проекція одного изъ боковыхъ реберъ на нижнее основаніе служитъ высотой нижняго основанія. Опредѣлить объемъ призмы, если боковыя ребра наклонены къ плоскости основанія подъ угломъ въ 45°.

455. Основаніемъ призмы служитъ треугольникъ со сторонами $a=13$ вершк., $b=14$ вершк. и $c=15$ вершк. Боковое ребро призмы, равное $l=8\sqrt{3}$ вершк., образуетъ съ плоскостью основанія уголъ въ 60°. Опредѣлить объемъ призмы.

456. Площади боковыхъ граней наклонной треугольной призмы соотвѣтственно равны $K=180$ кв. см., $M=117$ кв. см. и $N=189$ кв. см., а боковое ребро $a=9$ см. Опредѣлить объемъ призмы.

457. Опредѣлить объемъ наклонной треугольной призмы, въ которой боковое ребро, равное $a=8$ см., отстоитъ отъ противоположной грани на $b=7$ см., а разстояніе между двумя другими боковыми ребрами равно $c=6$ см.

458. Опредѣлить объемъ треугольной призмы, зная, что площади двухъ ея боковыхъ граней равны соотвѣтственно $M=150$ кв. дюйм. и $N=200$ кв. дюйм., боковое ребро $a=7{,}5$ дюйм. и двугранный уголъ между этими гранями равенъ 30°.

459. Опредѣлить объемъ наклонной треугольной призмы, въ которой одно изъ боковыхъ реберъ отстоитъ отъ противоположной грани на разстояніи $a=6$ см., а площадь этой грани равна $B=25$ кв. см.

460. Боковая поверхность наклонной треугольной призмы равна 784 кв. см., длина бокового ребра 10 см., а разстоянія отъ одного изъ боковыхъ реберъ до двухъ другихъ равны соотвѣтственно 35 см. и 33,6 см. Опредѣлить объемъ призмы.

461. Опредѣлить объемъ треугольной призмы, въ которой разстоянія между боковыми ребрами относятся, какъ 13 : 14 : 15, боковое ребро равно 10 см., а боковая поверхность призмы 840 кв. см.

462. Основаніемъ наклонной призмы служитъ равносторонній треугольникъ со стороной $a=5$ фут.; одна изъ боковыхъ граней перпендикулярна къ плоскости основанія и представляетъ собой ромбъ, одна изъ діагоналей котораго $b=8$ фут. Опредѣлить объемъ призмы.

463. Основаніемъ наклонной призмы служитъ правильный треугольникъ со стороной $a=8$ см.; одна изъ боковыхъ граней этой призмы представляетъ собою прямоугольникъ и наклонена къ плоскости основанія подъ угломъ въ 60°. Опредѣлить площадь основанія прямой призмы, равновеликой данной и имѣющей высоту, равную боковому ребру наклонной призмы.

464. Основаніемъ наклонной призмы служитъ равнобедренный прямоугольный треугольникъ съ катетомъ $a=4$ см.; боковое ребро, проходящее черезъ вершину прямого угла, образуетъ съ катетами равные углы и равно $b=10$ см. Опредѣлить объемъ призмы, если разстояніе между соотвѣтственными сторонами верхняго и нижняго основаній равно $c=8$ см.

465. Площадь основанія нѣкоторой наклонной призмы равна B, высота H, а боковое ребро b. Опредѣлить площадь сѣченія, перпендикулярнаго боковому ребру.

466. Площадь основанія призмы $B=116$ кв. дюйм., боковыя ребра равны $a=5$ дюйм., а одна изъ боковыхъ граней призмы, представляющая прямоугольникъ, наклонена къ плоскости основанія подъ угломъ въ 45°. Опредѣлить объемъ призмы.

467. Въ призмѣ, высота которой $H=81{,}12$ см., а площадь основанія $B=725{,}5$ кв. см., проведена плоскость, параллельная боковому ребру, такъ, что площадь образовавшагося сѣченія $B_1=117$ кв. см. На какое разстояніе слѣдуетъ продолжить высоту оставшейся части призмы съ основаніемъ B_1, чтобы получить объемъ, равный объему призмы съ основаніемъ B.

468. Основаніемъ призмы служитъ четыреугольникъ, діагонали котораго взаимно-перпендикулярны и равны $d=5$ см. и $d_1=6$ см. Каждое изъ боковыхъ реберъ равно $a=10\sqrt{2}$ см. и наклонено къ плоскости основанія подъ углами въ 45°. Опредѣлить объемъ призмы.

469. Основаніемъ наклонной призмы служитъ четыреугольникъ, діагонали котораго взаимно-перпендикулярны, при чемъ меньшая діагональ равна 8 дюйм. Площадь сѣченія, проходящаго черезъ большія діагонали верхняго и нижняго основаній призмы, равна 62,5 кв. дюйм. Опредѣлить объемъ этой призмы, если извѣстно, что

проведенное діагональное сѣченіе перпендикулярно къ плоскости основанія призмы.

470. Опредѣлить объемъ призмы, въ которой боковое ребро $l=10$ дюйм., а сѣченіе призмы плоскостью, перпендикулярной къ боковому ребру, образуетъ трапецію, параллельныя стороны которой $a=5$ дюйм. и $c=7$ дюйм., а разстояніе между ними $b=4$ дюйм.

471. Основаніемъ наклонной призмы, объемъ которой $V=120$ кб. дцм., служитъ трапеція; разстояніе между параллельными боковыми гранями этой призмы равно $a=15$ дцм. Опредѣлить площадь сѣченія, проходящаго черезъ среднія линіи трапецій, служащихъ верхнимъ и нижнимъ основаніями призмы.

Объемъ пирамиды.

При рѣшеніи задачъ на опредѣленіе объема пирамиды будемъ пользоваться тѣми же обозначеніями, которыя примѣнялись при опредѣленіи поверхности пирамиды.

Объемъ всякой пирамиды выражается произведеніемъ площади ея основанія на треть высоты, т.-е. $V=\frac{BH}{3}$.

Объемъ правильной треугольной пирамиды.

Обозначая сторону основанія правильной треугольной пирамиды буквой a, найдемъ, что площадь ея основанія будетъ $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, а объемъ пирамиды выразится формулой $\frac{a^2H\sqrt{3}}{12}$.

Для опредѣленія элементовъ пирамиды при рѣшеніи нижеприводимыхъ задачъ пользуются пріемами, примѣняемыми при рѣшеніи задачъ №№ 276—291.

472. Опредѣлить объемъ правильной треугольной пирамиды по сторонѣ основанія $a=12$ см. и высотѣ $H=8$ см.

473. Опредѣлить объемъ правильной треугольной пирамиды по сторонѣ основанія $a=4{,}5$ дцм. и боковому ребру $b=3$ дцм.

474. Опредѣлить объемъ правильной треугольной пирамиды по сторонѣ основанія $a=6$ фут. и апоѳемѣ боковой грани $h=2$ фут.

475. Опредѣлить объемъ правильной треугольной пирамиды по боковому ребру $b=5$ см. и апоѳемѣ боковой грани $h=3$ см.

476. Объемъ правильной треугольной пирамиды $V=240$ кб. дцм., а высота пирамиды $H=10$ дцм. Опредѣлить апоѳему боковой грани.

477. Опредѣлить объемъ правильной треугольной пирамиды, высота которой $H=6$ см., а боковое ребро $b=10$ см.

478. Опредѣлить объемъ правильной треугольной пирамиды, по ея боковой поверхности $S_б=9$ кв. дюйм. и сторонѣ основанія $a=2$ дюйм.

479. Боковая поверхность правильной пирамиды $S_б=144$ кв. фут., а апоѳема боковой грани $h=6$ фут. Опредѣлить объемъ пирамиды.

480. Объемъ правильной треугольной пирамиды $V=27$ кб. арш., а сторона основанія $a=6$ арш. Опредѣлить боковое ребро пирамиды и ея боковую поверхность.

481. Опредѣлить объемъ правильной треугольной пирамиды, если ея высота $H=4$ дюйм., а боковое ребро $b=5$ дюйм.

482. Боковая поверхность правильной треугольной пирамиды $S_б=288$ кв. арш., а боковое ребро $b=10$ арш. Опредѣлить объемъ пирамиды.

483. Опредѣлить объемъ правильной треугольной пирамиды, если ея боковая поверхность $S_б=4\sqrt{3}$ кв. дюйм., а площадь основанія равна боковой поверхности.

484. Объемъ правильной треугольной пирамиды $V=3\sqrt{13}$ кб. см., а площадь основанія $B=9\sqrt{3}$ кв. см. Опредѣлить боковую поверхность пирамиды.

485. Опредѣлить объемъ правильной треугольной пирамиды, въ которой боковое ребро $b=10$ см., а площадь основанія $B=27\sqrt{3}$ кв. см.

Объемъ правильной многоугольной пирамиды.

Примѣняя общую формулу для опредѣленія объема пирамиды въ нижеприводимыхъ задачахъ, приходится опредѣлять площадь многоугольника основанія при помощи соотвѣтствующихъ теоремъ планиметріи, а остальные элементы вычисляются указанными выше пріемами.

486. Въ правильной четыреугольной пирамидѣ сторона основанія $a=4$ см., а апоѳема боковой грани $h_1=3$ см. Опредѣлить объемъ пирамиды.

487. Опредѣлить объемъ правильной треугольной пирамиды, если ея высота $H=5$ см., а боковая поверхность $S_б=450$ кв. см.

488. Опредѣлить объемъ правильной четыреугольной пирамиды по сторонѣ основанія $a=3$ см. и высотѣ пирамиды $H=7$ см.

489. Сторона основанія правильной четыреугольной пирамиды $a=4$ дюйм., а боковое ребро $b=5$ дюйм. Опредѣлить объемъ пирамиды.

490. Объемъ правильной четыреугольной пирамиды $V=512$ кб. см., а сторона основанія $a=16$ см. Опредѣлить боковую поверхность пирамиды.

491. Опредѣлить объемъ правильной четыреугольной пирамиды по ея высотѣ $H=12$ см. и боковому ребру $b=15$ см.

492. Поверхность правильной четыреугольной пирамиды $S=84$ кв. см., а сторона основанія $a=6$ см. Опредѣлить объемъ пирамиды.

493. Боковая поверхность правильной четыреугольной пирамиды $S_б=100$ кв. саж., а ея высота $H=8$ саж. Опредѣлить объемъ пирамиды.

494. Опредѣлить объемъ правильной четыреугольной пирамиды по сторонѣ основанія $a=6$ дцм. и апоѳемѣ боковой грани $h=5$ дцм.

495. Боковое ребро правильной четыреугольной пирамиды $b=6$ см., а апоѳема боковой грани $h=5$ см. Опредѣлить объемъ пирамиды.

496. Боковая поверхность правильной четыреугольной пирамиды $S_б=240$ кв. см., а апоѳема боковой грани $h=10$ см. Опредѣлить объемъ пирамиды.

497. Объемъ правильной четыреугольной пирамиды $V=162$ кб. см., а ея высота $H=6$ см. Опредѣлить боковую поверхность пирамиды.

498. Опредѣлить объемъ правильной четыреугольной пирамиды, если ея боковое ребро $b=\sqrt{34}$ см., а боковая поверхность $S_б=60$ кв. см.

499. Опредѣлить объемъ правильной четыреугольной пирамиды, если сторона основанія $a=6$ дцм., а площадь діагональнаго сѣченія $Q=12\sqrt{2}$ кв. дцм.

500. Сторона основанія правильной пятиугольной пирамиды $a=5$ дцм., а ея высота $H=8$ дцм. Опредѣлить объемъ пирамиды.

501. Сторона основанія правильной пятиугольной пирамиды $a=4$ см., а боковое ребро $b=5$ см.. Опредѣлить объемъ пирамиды.

502. Боковая поверхность правильной пятиугольной пирамиды $S_б=210$ кв. арш., а апоѳема боковой грани $h=12$ арш. Опредѣлить объемъ пирамиды.

503. Объемъ правильной пятиугольной пирамиды V, а ея высота H. Опредѣлить ребро ея основанія.

504. Сторона основанія правильной шестиугольной пирамиды $a=5$ см., а боковое ребро $b=12$ см. Опредѣлить объемъ пирамиды.

505. Боковое ребро правильной шестиугольной пирамиды $b=13$ см., а апоѳема боковой грани $h=12$ см. Опредѣлить объемъ пирамиды.

506. Боковое ребро правильной шестиугольной пирамиды вдвое больше стороны основанія. Объемъ пирамиды 96 кб. см. Опредѣлить высоту пирамиды.

507. Боковая поверхность правильной шестиугольной пирамиды $S_б=360$ кв. дюйм., а сторона основанія $a=12$ дюйм. Опредѣлить объемъ пирамиды.

508. Объемъ правильной шестиугольной пирамиды $V=348$ кб. фут., а сторона основанія $a=5$ фут. Опредѣлить объемъ пирамиды.

509. Сторона основанія правильной шестиугольной пирамиды $a=8$ дюйм., а площадь меньшаго діагональнаго сѣченія $Q=$ $=144$ кв. дюйм. Опредѣлить объемъ пирамиды.

510. Высота правильной шестиугольной пирамиды $H=3$ см., а боковыя грани наклонены къ плоскости основанія подъ угломъ въ 30°. Опредѣлить объемъ пирамиды.

511. Сторона основанія правильной восьмиугольной пирамиды $a=4$ фут., а ея высота $H=10$ фут. Опредѣлить объемъ пирамиды.

512. Сторона правильной десятиугольной пирамиды $a=3$ см., а ея высота $H=8$ см. Опредѣлить объемъ пирамиды.

Объемъ неправильной пирамиды.

Въ нижеприводимыхъ задачахъ объемъ пирамиды не зависитъ отъ положенія высоты, такъ какъ пирамиды, имѣющія равновеликія основанія и равныя высоты, равновелики.

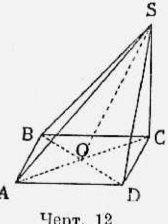
Замѣчаніе. Изъ сказаннаго слѣдуетъ, что во всякой пирамидѣ при перемѣщеніи ея вершины въ плоскости, параллельной плоскости основанія, будетъ измѣняться только ея боковая поверхность, но объемъ останется прежнимъ.

Вслѣдствіе этого во всѣхъ задачахъ, гдѣ положеніе высоты точно не указано, эта высота можетъ быть проведена произвольно.

При рѣшеніи задачъ на опредѣленіе объема неправильной пирамиды примѣняются тѣ же пріемы, что и при рѣшеніи задачъ на опредѣленіе объемовъ правильныхъ пирамидъ.

Разсмотримъ слѣдующую задачу.

Опредѣлить объемъ пирамиды, основаніемъ которой служитъ ромбъ съ діагоналями d_1 *и* d_2, *если высота этой пирамиды проходитъ черезъ вершину остраго угла ромба, а площадь діагональнаго сѣченія, проходящаго черезъ меньшую діагональ, равна* Q.



Черт. 12.

Пусть $ABCD$ — данная пирамида, въ которой SC — высота, $BD=d_1$ и $AC=d_2$ (при чемъ $d_1<d_2$); тогда треугольникъ BSD будетъ діагональнымъ сѣченіемъ, площадь котораго равна Q.

Для опредѣленія объема пирамиды имѣемъ формулу $V=\frac{BH}{3}$, гдѣ $B=\frac{d_1d_2}{2}$, а высота H, равная SC, опредѣлится изъ разсмотрѣнія прямоугольнаго треугольника SCO, въ которомъ $CO=\frac{d_2}{2}$, а гипотенуза OS можетъ быть вычислена, какъ высота діагональнаго сѣченія BSD. Замѣтивъ, что $Q=\frac{BD.OS}{2}=\frac{d_1.OS}{2}$, будемъ имѣть $OS=\frac{2Q}{d_1}$. Слѣдовательно $SC=\sqrt{OS^2-OC^2}=\frac{1}{2d_1}\sqrt{16\,Q^2-d_1^2d_2^2}$.

Такимъ образомъ, искомый объемъ выразится въ видѣ

$$V=\frac{d_2}{12}\sqrt{16Q^2-d_1^2d_2^2}.$$

513. Основаніемъ пирамиды служитъ треугольникъ со сторонамъ $a=13$ см., $b=14$ см. и $c=15$ см. Боковыя ребра пирамиды наклонены къ плоскости основанія подъ углами въ 30°. Опредѣлить объемъ пирамиды.

514. Основаніемъ пирамиды служитъ квадратъ съ площадью $B=9$ кв. фут. Одно изъ боковыхъ реберъ перпендикулярно къ площади основанія; большее боковое ребро $b=8$ фут.. Опредѣлить объемъ пирамиды.

515. Основаніемъ пирамиды служитъ прямоугольникъ, одна изъ сторонъ котораго $a=3$ фут. Высота пирамиды $H=6$ фут. и про-

ходитъ черезъ точку пересѣченія діагоналей основанія. Опредѣлить объемъ пирамиды, если ея боковое ребро $c=6{,}5$ фут.

516. Основаніемъ пирамиды служитъ прямоугольникъ со сторонами $a=5$ см. и $b=6$ см. Боковыя ребра пирамиды одинаковы и равны $c=8$ см. Опредѣлить объемъ пирамиды.

517. Основаніемъ пирамиды служитъ параллелограммъ со сторонами $a=20$ см. и $b=21$ см. и одной изъ діагоналей $d=13$ см. Высота проходитъ черезъ точку пересѣченія діагоналей. Каждое изъ меньшихъ боковыхъ реберъ равно $=19{,}5$ см. Опредѣлить объемъ пирамиды.

518. Опредѣлить объемъ пирамиды, основаніемъ которой служитъ ромбъ со стороной $a=5$ дцм., если высота пирамиды равна $H=10$ дцм., и проходитъ черезъ точку пересѣченія діагоналей, а площадь одного изъ діагональныхъ сѣченій $Q=48$ кв. дцм.

519. Основаніемъ пирамиды служитъ равнобедренная трапеція, параллельныя стороны которой $a=8$ дюйм. и $c=2$ дюйм., а боковая сторона $b=5$ дюйм. Діагональное сѣченіе пирамиды перпендикулярно къ плоскости основанія; площадь этого сѣченія $Q=5\sqrt{41}$ дюйм. Опредѣлить объемъ пирамиды.

520. Основаніемъ пирамиды служитъ четыреугольникъ со сторонами $a=39$ см., $b=52$ см., $c=25$ см. и $d=60$ см.; стороны a и b взаимно перпендикулярны. Высота пирамиды $H=30$ см. Опредѣлить объемъ пирамиды.

521. Основаніемъ пирамиды служитъ трапеція со сторонами $a=30$ см.; $b=20$ см., $c=9$ см. и $d=13$ см. (a и c — основанія трапеціи). Высота пирамиды проходитъ черезъ нѣкоторую точку меньшаго основанія трапеціи, а вершина пирамиды отстоитъ на $e=20$ см., отъ большого основанія трапеціи. Опредѣлить объемъ пирамиды.

522. Основаніемъ пирамиды служитъ прямоугольный треугольникъ, одинъ изъ острыхъ угловъ котораго 60°, а меньшій катетъ $a=6$ фут. Высота пирамиды равна медіанѣ гипотенузы. Опредѣлить объемъ пирамиды.

523. Основаніемъ пирамиды служитъ равнобедренный прямоугольный треугольникъ. Боковыя грани наклонены къ плоскости основанія подъ угломъ въ 45°. Опредѣлить высоту пирамиды, если ея объемъ $V=36$ кб. дцм.

524. Основаніемъ пирамиды служитъ равнобедренный треугольникъ, боковая сторона котораго $a=10$ см., а основаніе $b=12$ см. Высота пирамиды проходитъ черезъ средину биссектрисы большаго угла основанія; боковое ребро, проходящее черезъ вершину этого же угла основанія, равно $c=5$ см. Опредѣлить объемъ пирамиды.

525. Опредѣлить объемъ треугольной пирамиды $SABC$ по ея ребрамъ $AB=12{,}15$ дцм., $BC=17{,}7$ дцм., $AC=15{,}75$ см., $SA=20{,}9$ дцм., $SC=23{,}9$ дцм. и $SB=22{,}25$ дцм.

526. Основаніемъ пирамиды служитъ прямоугольникъ. Высота пирамиды $H=6$ дюйм. Апоѳемы двухъ противоположныхъ боковыхъ граней пирамиды образуютъ съ плоскостью основанія углы въ 45°, а апоѳемы двухъ другихъ граней — углы въ 60°. Опредѣлить объемъ пирамиды.

Усѣченная пирамида.

Опредѣленіе различныхъ элементовъ усѣченной пирамиды.

При рѣшеніи задачъ этого отдѣла слѣдуетъ помнить, что боковыя грани усѣченной пирамиды представляютъ собой трапеціи и слѣдовательно для опредѣленія элементовъ усѣченной пирамиды примѣняются теоремы планиметріи, относящіяся къ опредѣленію элементовъ трапеціи. Что же касается вычисленія высоты усѣченной пирамиды, то ее можно опредѣлить по теоремѣ Пиѳагора, изъ разсмотрѣнія прямоугольнаго треугольника, гипотенузой котораго служитъ или боковое ребро усѣченной пирамиды или апоѳема ея боковой грани.

527. Въ правильной треугольной усѣченной пирамидѣ стороны нижняго и верхняго основаній равны соотвѣтственно $a=6$ фут. и $a_1=4$ фут., а апоѳема боковой грани $h=3$ фут. Опредѣлить высоту этой пирамиды.

528. Сходственныя стороны основаній нѣкоторой усѣченной пирамиды равны $a=7$ см. и $a_1=4$ см. Опредѣлить периметры основаній, если периметръ сѣченія, проведеннаго черезъ средину высоты, параллельно основаніямъ пирамиды, равенъ $2p=44$ см.

529. Въ правильной треугольной усѣченной пирамидѣ стороны нижняго и верхняго основаній равны соотвѣтственно $a=4$ см. и $a_1=2$ см. Боковое ребро пирамиды $b=3$ см., а боковая грань образуетъ съ плоскостью большаго основанія уголъ въ 45°. Опредѣлить высоту пирамиды.

530. Въ правильной треугольной усѣченной пирамидѣ периметры основаній равны $2p=24$ см. и $2p'=15$ см. Боковое ребро пирамиды, равное $b=6$ см., наклонено къ плоскости большаго основанія подъ угломъ въ 60°. Опредѣлить площадь сѣченія, проведеннаго черезъ боковое ребро и среднюю точку противоположной ему стороны основанія.

531. Въ правильной треугольной усѣченной пирамидѣ стороны основаній $a=10$ см. и $a_1=4$ см., а высота $H=6$ см. Черезъ сторону меньшаго основанія параллельно противоположному боковому ребру проведена плоскость. Опредѣлить площадь полученнаго сѣченія.

532. Нижнимъ основаніемъ усѣченной пирамиды служитъ правильный треугольникъ съ площадью $B=16\sqrt{3}$ кв. дцм. Одна изъ боковыхъ граней перпендикулярна къ плоскости основанія; противолежащее боковое ребро наклонено къ плоскости основанія подъ угломъ въ 45° и одинаково наклонено къ прилежащимъ ребрамъ основанія. Периметръ верхняго основанія этой усѣченной пирамиды равенъ $2p'=12$ дцм. Опредѣлить высоту пирамиды.

533. Въ правильной усѣченной треугольной пирамидѣ сторона большаго основанія $a=10$ см., а высота пирамиды $H=5$ см. Площадь сѣченія, проведеннаго черезъ сторону большаго основанія и противолежащую вершину меньшаго, равна площади большаго основанія. Опредѣлить сторону меньшаго основанія пирамиды.

534. Въ правильной четыреугольной усѣченной пирамидѣ высота $H=4$ см., апоѳема боковой грани $h=2\sqrt{5}$ см., а отношеніе периметровъ основаній равно $m:n=5:3$. Опредѣлить діагональ этой пирамиды.

535. Въ правильной четыреугольной усѣченной пирамидѣ діагонали ея діагональнаго сѣченія взаимно-перпендикулярны. Сторона большаго основанія пирамиды $a=4$ дюйм., а высота пирамиды $H=3\sqrt{2}$ дюйм. Опредѣлить сторону меньшаго основанія пирамиды.

536. Въ правильной четыреугольной усѣченной пирамидѣ высота $H=3$ фут. Черезъ ребро $a=5$ фут. нижняго основанія и противоположное ему ребро $a_1=3$ фут. верхняго основанія проведена плоскость. Опредѣлить площадь образовавшагося сѣченія.

537. Въ правильной четыреугольной усѣченной пирамидѣ высота $H=4$ дюйм., апоѳема боковой грани $h=5$ дюйм., а площадь діагональнаго сѣченія $Q=28$ кв. дюйм. Опредѣлить стороны основаній.

Поверхность усѣченной пирамиды.

Въ нижеприводимыхъ задачахъ разсмотрѣно опредѣленіе поверхности правильной усѣченной пирамиды. Боковая поверхность правильной усѣченной пирамиды выражается произведеніемъ полусуммы периметровъ ея основаній на апоѳему боковой грани.

Обозначивъ стороны верхняго и нижняго основаній правильной усѣченной пирамиды буквами a_1 и a, число сторонъ каждаго изъ многоугольниковъ ея основаній буквой n, а апоѳему боковой грани буквой h, выразимъ боковую поверхность правильной усѣченной пирамиды формулой

$$S_{б.у.п.}=\frac{(a_1n+an)h}{2}=\frac{nh(a_1+a)}{2}.$$

Обозначивъ площади верхняго и нижняго основаній правильной усѣченной пирамиды буквами B_1 и B, выразимъ полную поверхность этой пирамиды формулой

$$S=S_{б.}+B_1+B=\frac{(a_1n+an)nh}{2}+B_1+B.$$

Кромѣ того, при рѣшеніи нижеприводимыхъ задачъ примѣняются теоремы, указанныя передъ задачами №№ 253—262.

538. Въ правильной треугольной усѣченной пирамидѣ сторона нижняго основанія $a=5$ см., сторона верхняго основанія $a_1=3$ см., а высота пирамиды $H=4$ см. Опредѣлить боковую поверхность пирамиды.

539. Стороны основаній правильной треугольной усѣченной пирамиды $a=5$ см. и $a_1=2$ см., а боковое ребро $b=4$ см. Опредѣлить боковую поверхность пирамиды.

540. Боковая поверхность правильной треугольной усѣченной пирамиды $S_б=40$ кв. дюйм., а стороны основаній равны соотвѣтственно $a=5$ дюйм. и $a_1=2$ дюйм. Опредѣлить высоту пирамиды.

541. Стороны нижняго и верхняго основаній правильной усѣченной n-угольной пирамиды равны соотвѣтственно a и a_1, а апоѳема боковой грани равна h. Опредѣлить боковую поверхность усѣченной пирамиды.

542. Опредѣлить боковую поверхность правильной четыреугольной усѣченной пирамиды по ея высотѣ $H=5$ см. и сторонамъ основаній $a=8$ см. и $a_1=3$ см.

543. Въ правильной четыреугольной усѣченной пирамидѣ боковая поверхность $S_б=48$ кв. дюйм., сторона большаго основанія $a=3$ дюйм., а апоѳема боковой грани $h=6$ дюйм. Опредѣлить сторону меньшаго основанія и высоту пирамиды.

544. Опредѣлить полную поверхность правильной усѣченной шестиугольной пирамиды, высота которой $H=16$ дцм., апоѳема боковой грани $h=20$ дцм., а сторона меньшаго основанія $a_1=2{,}5$ дцм.

545. Поверхность правильной шестиугольной усѣченной пирамиды $S=183$ кв. фут., боковая поверхность $S_б=120$ кв. фут., а сторона большаго основанія $a=4$ фут. Опредѣлить сторону другого основанія и высоту пирамиды.

546. Трегранный уголъ, въ которомъ всѣ плоскіе углы прямые, пересѣченъ двумя параллельными плоскостями такъ, что въ сѣченіи получились равносторонніе треугольники, стороны которыхъ $a=6$ см. и $a_1=4$ см. Опредѣлить поверхность образовавшейся усѣченной пирамиды.

547. Въ правильной треугольной усѣченной пирамидѣ стороны основаній $a=4$ дцм. и $a_1=2$ дцм. Площадь сѣченія, проходящаго черезъ боковое ребро и средину противоположной стороны основанія, равна площади боковой грани. Опредѣлить поверхность пирамиды.

548. Въ правильной треугольной пирамидѣ боковое ребро $b=10$ см., а сторона основанія $a=12$ см. Плоскость, проведенная параллельно основанію, дѣлитъ высоту пирамиды на части въ отношеніи $m:n=2:3$ (считая отъ вершины). Опредѣлить боковую поверхность усѣченной пирамиды.

549. Въ правильной треугольной пирамидѣ сторона основанія $a=36$ фут., а высота $H=23$ фут. Эта пирамида усѣчена плоскостью, проведенной параллельно основанію, на разстояніи $m=18$ фут. отъ вершины. Опредѣлить боковую поверхность усѣченной пирамиды.

550. Въ правильной четыреугольной пирамидѣ сторона основанія $a=4$ см., а боковое ребро $b=8$ см. Эта пирамида усѣчена плоскостью, параллельной основанію и отстоящей отъ него въ разстояніи $h=3$ см. Опредѣлить полную поверхность усѣченной пирамиды.

551. Основаніемъ пирамиды служитъ правильный шестиугольникъ со стороной $a=4$ см. и апоѳемой боковой грани $h=6$ см. На какомъ разстояніи отъ вершины пирамиды будетъ находиться плоскость, проведенная параллельно основанію такъ, чтобы боковая поверхность усѣченной пирамиды была равна $S_б=40$ кв. см.

552. Площади нижняго и верхняго основаній усѣченной пирамиды равны соотвѣтственно $B=50$ кв. дюйм. и $B_1=32$ кв. дюйм. Эта пирамида разсѣчена параллельно основанію плоскостью, проходящей черезъ средину высоты пирамиды. Опредѣлить площадь образовавшагося сѣченія.

553. Стороны основаній правильной n-угольной усѣченной пирамиды равны a и a_1. Эта пирамида разсѣчена плоскостью, параллельной ея основаніямъ, такъ, что боковыя поверхности образовавшихся частей пирамиды равны между собою. Опредѣлить периметръ многоугольника сѣченія.

554. Боковая поверхность пирамиды съ высотой $H=12$ дюйм. раздѣлена плоскостями, параллельными основанію пирамиды, на части въ отношеніи $m:n:p=3:2:4$ (считая отъ вершины). Опредѣлить разстоянія этихъ плоскостей отъ вершины пирамиды.

Объемъ усѣченной пирамиды.

Объемъ усѣченной пирамиды равенъ суммѣ объемовъ трехъ пирамидъ, у которыхъ высоты одинаковы съ высотой усѣченной пирамиды, а основаніями служатъ у первой — нижнее основаніе усѣченной пирамиды, у второй — верхнее ея основаніе, а у третьей — среднее пропорціональное между ними.

Обозначивъ высоту усѣченной пирамиды буквой H, а площади ея основаній буквами B и B_1, выразимъ объемъ усѣченной пирамиды формулой

$$V=\frac{H}{3}(B+B_1+\sqrt{B.B_1}).$$

555. Въ правильной треугольной усѣченной пирамидѣ стороны нижняго и верхняго основаній равны соотвѣтственно $a=4$ фут. и $a_1=3$ фут., а высота пирамиды $H=2$ фут. Опредѣлить объемъ пирамиды.

556. Площади основаній усѣченной пирамиды $B=16$ кв. см. и $B_1=9$ кв. см., а ея объемъ $V=74$ кб. см. Опредѣлить высоту пирамиды.

557. Стороны основаній правильной треугольной усѣченной пирамиды $a=16$ фут. и $a_1=4$ фут., а боковое ребро $b=10$ фут. Опредѣлить объемъ этой пирамиды.

558. Объемъ усѣченной пирамиды $V=148$ кб. дюйм., высота ея $H=6$ дюйм., а площадь одного изъ основаній $B=32$ кв. дюйм. Опредѣлить площадь второго основанія.

559. Стороны нижняго и верхняго основаній правильной треугольной пирамиды равны соотвѣтственно $a=7$ дцм. и $a_1=5$ дцм., а апоѳема боковой грани $h=4$ дцм. Опредѣлить объемъ этой пирамиды.

560. Боковая поверхность правильной треугольной усѣченной пирамиды $S_б=20$ кв. дюйм., а стороны ея основаній $a=2{,}5$ дюйм. и $a_1=1$ дюйм. Опредѣлить объемъ пирамиды.

561. Объемъ пирамиды $V=392$ кб. см., высота $H=12$ см., а отношеніе площадей основаній равно $m:n=9:25$. Опредѣлить площади основаній.

562. Опредѣлить объемъ правильной четыреугольной усѣченной пирамиды по сторонамъ основаній $a=6$ фут. и $a_1=2$ фут. и боковому ребру $b=4$ фут.

563. Въ правильной четыреугольной усѣченной пирамидѣ стороны основаній $a=8$ см. и $a_1=5$ см., а боковая поверхность $S_б=50$ кв. см. Опредѣлить объемъ пирамиды.

564. Объемъ правильной треугольной усѣченной пирамиды $V=109\frac{3}{8}$ кб. дцм., а стороны ея основаній соотвѣтственно равны $a=10$ дцм. и $a_1=5$ дцм. Опредѣлить высоту пирамиды и боковую поверхность.

565. Объемъ правильной усѣченной четыреугольной пирамиды $V=162{,}5$ кб. дцм., ея высота $H=6$ дцм., а сторона большого основанія $a=7{,}5$ дцм. Опредѣлить боковую поверхность пирамиды.

566. Объемъ правильной четыреугольной усѣченной пирамиды $V=42$ кб. дюйм., а стороны ея основаній $a=4$ дюйм. и $a_1=1$ дюйм. Опредѣлить боковую поверхность этой пирамиды.

567. Въ правильной четыреугольной усѣченной пирамидѣ сторона большого основанія $a=6$ дцм., а сторона меньшаго $a_1=2$ дцм. Опредѣлить высоту этой пирамиды, если ея боковая поверхность вдвое меньше полной поверхности.

568. Поверхность правильной усѣченной четыреугольной пирамиды $S=77$ кв. фут., боковая поверхность $S_б=51$ кв. фут., а сторона большого основанія $a=5$ фут. Опредѣлить объемъ этой пирамиды.

569. Опредѣлить объемъ усѣченной пирамиды, высота которой $H=6$ дюйм., площадь большаго основанія $B=20$ кв. дюйм., а отношеніе периметровъ основаній равно $m:n=4:3$.

570. Опредѣлить объемъ правильной усѣченной шестиугольной пирамиды по сторонамъ ея основаній $a=8$ см. и $a_1=5$ см. и апоѳемѣ боковой грани $h=4$ см.

571. Опредѣлить объемъ правильной усѣченной шестиугольной пирамиды по сторонамъ ея основаній $a=10$ дюйм. и $a_1=5$ дюйм. и боковому ребру $b=13$ дюйм.

572. Площади основаній треугольной усѣченной пирамиды $B=18$ кв. дюйм. и $B_1=50$ кв. дюйм. Черезъ одну изъ вершинъ пирамиды проведены двѣ плоскости, дѣлящія данную пирамиду на три полныхъ треугольныхъ пирамиды. Опредѣлить отношеніе объемовъ полученныхъ пирамидъ.

573. Боковая поверхность правильной усѣченной шестиугольной пирамиды $S_б=195\sqrt{91}$ кв. дюйм., а высота пирамиды $H=4$ дюйм. Опредѣлить объемъ этой пирамиды, если площадь большаго діагональнаго сѣченія $Q=26$ кв. дюйм.

574. Въ правильной треугольной усѣченной пирамидѣ стороны основаній $a=6$ см. и $a_1=4$ см. Площадь сѣченія, проходящаго черезъ боковое ребро и средину противоположной стороны основанія равна площади большаго основанія. Опредѣлить объемъ этой пирамиды.

575. Стороны основаній правильной четыреугольной пирамиды $a=4$ см. и $a_1=3$ см., а площадь діагональнаго сѣченія $Q=21\sqrt{2}$ кв. см. Опредѣлить объемъ этой пирамиды.

576. Большее основаніе усѣченной пирамиды представляетъ собой прямоугольный треугольникъ съ катетами $a=6$ см. и $b=8$ см. Боковыя ребра наклонены къ плоскости этого основанія подъ углами въ $45°$. Периметръ меньшаго основанія вдвое меньше периметра большаго основанія. Опредѣлить объемъ этой пирамиды.

Объемъ усѣченной пирамиды въ связи съ сѣченіями ея плоскостями, параллельными основаніямъ пирамиды.

При рѣшеніи нижеприводимыхъ задачъ примѣняются теоремы указанныя въ отдѣлѣ о сѣченіи пирамиды плоскостями, параллель-

ными плоскости ея основанія; кромѣ этихъ теоремъ приходится пользоваться формулой, выражающей объемъ усѣченной пирамиды.

577. Основаніемъ пирамиды служитъ прямоугольникъ со сторонами $a=6$ фут. и $b=5$ фут.; боковое ребро пирамиды $c=10$ фут.. Эта пирамида разсѣчена на двѣ равновеликія части плоскостью, параллельной основанію. Опредѣлить разстояніе плоскости сѣченія отъ вершины пирамиды.

578. Высота пирамиды $H=4$ арш. На какомъ разстояніи отъ вершины пирамиды слѣдуетъ провести плоскость, параллельную основанію, чтобы она разсѣкла пирамиду на двѣ равновеликія части.

579. Высота пирамиды $H=17{,}4$ дцм., площадь основанія $B=64$ кв. дцм. Эта пирамида разсѣчена плоскостью, параллельной основанію такъ, что площадь полученнаго сѣченія $B_1=36$ кв. дцм. Опредѣлить объемъ усѣченной пирамиды.

580. Отъ пирамиды съ площадью основанія $B=8$ кв. дцм. и высотой $H=5$ дцм. отсѣчена часть двумя параллельными основанію плоскостями, разстояніе между которыми $m=2$ дцм. Объемъ отсѣченной части пирамиды $v=3$ кб. дцм. Опредѣлить разстояніе отъ вершины пирамиды до ближайшей изъ этихъ плоскостей.

581. Пирамида, высота которой $H=9$ см., разсѣчена плоскостями, параллельными ея основанію, на три равновеликія части. Опредѣлить разстояніе каждой изъ проведенныхъ плоскостей отъ вершины пирамиды.

582. Высота усѣченной пирамиды $H=5$ см., а площади ея основаній $B=16$ кв. см. и $B_1=9$ кв. см. Опредѣлить объемъ пирамиды, дополняющей данную усѣченную до полной.

583. Площади основаній усѣченной пирамиды $B=16$ кв. фут. и $B_1=9$ кв. фут. Эта пирамида разсѣчена плоскостями, параллельными основаніямъ, на 3 равновеликія части. Опредѣлить площади получившихся сѣченій.

Объемъ призмы, усѣченной непараллельно основанію.

При рѣшеніи нижеприводимыхъ задачъ примѣняются слѣдующія теоремы:

1. Объемъ *треугольной призмы*, усѣченной непараллельно основанію, равенъ суммѣ объемовъ трехъ пирамидъ, имѣющихъ съ усѣченной призмой общее основаніе, а вершины — въ трехъ вершинахъ непараллельнаго сѣченія.

2. Объемъ *прямого параллелепипеда*, усѣченнаго непараллельно основанію, равенъ произведенію площади его основанія на среднеариѳметическое длинъ двухъ противоположныхъ боковыхъ реберъ.

584. Площадь основанія наклонной треугольной призмы, усѣченной непараллельно основанію, равна $B=12$ кб. дюйм., а разстоянія отъ вершины непараллельнаго сѣченія до плоскости основанія равны $l=5$ дюйм., $m=6$ дюйм. и $n=4{,}5$ дюйм. Опредѣлить объемъ призмы.

585. Опредѣлить объемъ наклонной треугольной призмы, усѣченной непараллельно основанію, если ея боковыя ребра $b=5$ см., $c=8$ см. и $d=12$ см., а разстоянія между ними одинаковы и равны $a=6$ см.

586. Опредѣлить объемъ наклонной треугольной призмы, усѣченной непараллельно основанію, если ея боковыя ребра $l=4$ дюйм., $m=5$ дюйм. и $n=6$ дюйм., а разстоянія между ними $a=3$ дюйм. (между l и m), $b=4$ дюйм. (между m и n) и $c=5$ дюйм. (между n и l).

587. Въ правильной треугольной призмѣ сторона основанія $a=2$ см., а высота $H=6$ см. Черезъ одно изъ реберъ верхняго основанія проведена плоскость подъ угломъ въ 60° къ этому основанію, отсѣкающая отъ призмы нѣкоторую ея часть. Опредѣлить объемъ оставшейся усѣченной призмы.

588. Основаніемъ наклонной призмы служитъ правильный треугольникъ со стороной $a=3$ дцм. Боковыя ребра наклонены къ плоскости основанія подъ угломъ въ 45°. Эта призма усѣчена непараллельно основанію плоскостью такъ, что боковыя ребра образовавшейся усѣченной призмы послѣдовательно равны $b=8$ дцм., $c=6$ дцм. и $d=10$ дцм. Опредѣлить объемъ усѣченной призмы.

589. Основаніемъ прямого усѣченнаго параллелепипеда служитъ ромбъ, діагонали котораго $d_1=7$ фут. и $d_2=6$ фут. Два противоположныхъ боковыхъ ребра равны соотвѣтственно $b=5$ фут. и $c=9$ фут. Опредѣлить объемъ параллелепипеда.

590. Основаніемъ прямого усѣченнаго параллелепипеда служитъ прямоугольникъ со сторонами $a=6$ дцм. и $b=8$ дцм. Плоскость верхняго основанія наклонена къ плоскости нижняго основанія подъ угломъ въ 30° и разсѣкаетъ боковыя ребра, проходящія черезъ концы стороны a, такъ, что отсѣченныя части реберъ одинаковы и каждое равно половинѣ любого изъ двухъ другихъ боковыхъ реберъ. Опредѣлить объемъ этого параллелепипеда.

591. Опредѣлить объемъ наклонной многоугольной призмы съ четнымъ числомъ сторонъ въ основаніи, если площадь перпендикулярнаго сѣченія $Q=14$ кв. фут., а сумма двухъ взаимно-противоположныхъ боковыхъ реберъ $m=5$ фут.

Комбинаціи призмъ и пирамидъ.

При рѣшеніи задачъ этого отдѣла приходится пользоваться формулами, указанными ранѣе при опредѣленіи зависимости между основными элементами призмъ и пирамидъ; рѣшая нѣкоторыя изъ задачъ полезно проводить сѣченія плоскостями, выбирая ихъ такъ, чтобы можно было установить связь неизвѣстныхъ элементовъ полученнаго сѣченія съ данными въ задачѣ элементами.

592. Въ кубѣ, ребро котораго $a=2$ дюйм., точка пересѣченія діагоналей верхняго основанія и средины сторонъ нижняго основанія служатъ вершинами пирамиды. Опредѣлить объемъ этой послѣдней.

593. Равносторонній треугольникъ служитъ общимъ основаніемъ прямой призмы и пирамиды, всѣ ребра которой одинаковы, а высота призмы равна высотѣ пирамиды. Опредѣлить отношеніе ихъ боковыхъ поверхностей.

594. Сторона основанія правильной четыреугольной пирамиды $a=5$ см., а ея высота $H=6$ см. Внутри этой пирамиды расположенъ кубъ такъ, что одна изъ его граней совпадаетъ съ основаніемъ пирамиды, а четыре вершины противоположной грани лежатъ на апоѳемахъ боковыхъ граней пирамиды. Опредѣлить ребро этого куба.

595. Въ правильной треугольной пирамидѣ, сторона основанія которой $a=3$ см., а высота $H=6$ см., расположена прямая треугольная призма такъ, что одно изъ ея основаній совпадаетъ съ основаніемъ пирамиды, а вершины другого основанія находятся на боковыхъ ребрахъ пирамиды. Опредѣлить поверхность и объемъ этой призмы, если извѣстно, что сторона ея основанія и боковое ребро равны между собой.

596. Сторона основанія правильной треугольной пирамиды $a=6$ дюйм., а ея высота $H=4\sqrt{3}$ дюйм. Внутри этой пирамиды расположена прямая треугольная призма такъ, что ея нижнее основаніе совпадаетъ съ основаніемъ пирамиды, а вершины верхняго основанія лежатъ въ точкахъ пересѣченія медіанъ боковыхъ граней пирамиды. Опредѣлить объемъ этой призмы.

597. Основаніемъ пирамиды служитъ правильный треугольникъ со стороной $a=4$ дцм.; высота пирамиды $H=8$ дцм. Черезъ средины двухъ боковыхъ реберъ пирамиды проведены плоскости — одна, параллельно третьему боковому ребру, а другая — параллельно основанію пирамиды. Опредѣлить объемъ треугольной призмы, отсѣченной отъ пирамиды этими плоскостями.

598. Въ прямоугольномъ параллелепипедѣ съ квадратнымъ основаніемъ, сторона основанія $a=3$ арш., а высота $H=4$ арш. Изъ этого параллелепипеда вырѣзаны двѣ пирамиды, основаніями которыхъ служатъ основанія параллелепипеда, а ихъ общая вершина находится въ точкѣ пересѣченія діагоналей параллелепипеда. Опредѣлить объемъ оставшейся части.

599. Площадь основанія прямоугольнаго параллелепипеда $B=24$ кв. фут., а его высота $H=8$ фут. Внутри параллелепипеда находятся двѣ пирамиды, основаніями которыхъ служатъ основанія параллелепипеда, а вершина каждой изъ нихъ лежитъ въ точкѣ пересѣченія діагоналей противоположнаго основанія. Опредѣлить объемъ, общій обѣимъ пирамидамъ.

600. Кубъ, ребро котораго $a=6$ дцм., срѣзанъ по угламъ плоскостями, проходящими черезъ средины реберъ, выходящихъ изъ вершины каждаго угла. Опредѣлить поверхность и объемъ образовавшагося тѣла.

601. Кубъ, ребро котораго $a=3$ см., срѣзанъ по угламъ такъ, что каждая его грань стала представлять собой правильный восьмиугольникъ. Опредѣлить поверхность и объемъ образовавшагося тѣла.

602. Высота прямоугольнаго параллелепипеда съ квадратнымъ основаніемъ $H=10$ дцм., а сторона основанія $a=5$ дцм. На двухъ противоположныхъ боковыхъ граняхъ этого параллелепипеда проведены непараллельныя другъ другу діагонали. Опредѣлить поверхность пирамиды, вершинами которой служатъ концы проведенныхъ діагоналей.

603. Двѣ правильныя треугольныя пирамиды, всѣ ребра которыхъ одинаковы и равны $a=3$ дцм., имѣютъ общее основаніе и лежатъ по обѣ его стороны. Точки пересѣченія высотъ каждой изъ шести граней образовавшагося многоугольника служатъ вершинами прямой треугольной призмы. Опредѣлить объемъ этой призмы.

604. Измѣренія прямоугольнаго параллелепипеда $a=6$ дцм., $=5$ дцм. и $c=4$ дцм. Опредѣлить поверхность и объемъ многогран-

ника (октаэдра), вершины котораго находятся въ точкахъ пересѣченія діагоналей каждой грани.

605. Въ правильной шестиугольной призмѣ сторона основанія $a=5$ фут. Одно изъ основаній призмы служитъ также основаніемъ правильной пирамиды, вершина которой лежитъ въ центрѣ другого основанія. Опредѣлить общую ихъ высоту, если извѣстно, что ихъ боковыя поверхности одинаковы.

606. Площадь большаго основанія усѣченной параллельно основанію пирамиды равна $B=16$ кв. дюйм., а ея высота $H=6$ дюйм. Меньшее основаніе этой пирамиды служитъ основаніемъ другой пирамиды (полной), вершина которой лежитъ на большемъ основаніи усѣченной пирамиды. Опредѣлить объемъ внутренней пирамиды, если извѣстно, что она равновелика пирамидѣ, дополняющей данную до полной.

Подобіе призмъ и пирамидъ.

Призмы (или пирамиды) называются *подобными*, если онѣ имѣютъ соотвѣтственно равные многогранные углы и соотвѣтственно подобныя грани.

Въ подобныхъ призмахъ (или пирамидахъ):

1. Сходственныя ребра и діагонали пропорціональны.
2. Площади сходственныхъ граней относятся, какъ квадраты сходственныхъ реберъ или діагоналей.
3. Поверхности относятся, какъ квадраты сходственныхъ реберъ.
4. Объемы относятся, какъ кубы сходственныхъ реберъ.

Указанныя свойства подобныхъ многогранниковъ примѣняются при рѣшеніи нижеприводимыхъ задачъ.

607. Площади основаній двухъ подобныхъ призмъ (или пирамидъ) соотвѣтственно равны $B=5$ кв. дцм. и $B_1=20$ кв. дцм. Высота перваго тѣла $H=8$ дцм. Опредѣлить высоту второго.

608. Поверхности двухъ подобныхъ призмъ (или пирамидъ) относятся между собой, какъ $m:n=4:9$, а сумма двухъ ихъ сходственныхъ реберъ равна $p=10$ см. Опредѣлить длину этихъ реберъ.

609. Сходственныя ребра двухъ подобныхъ призмъ (или пирамидъ) относятся, какъ $m:n=5:3$, а разность ихъ поверхностей равна $S=32$ кв. дцм. Опредѣлить эти поверхности.

610. Поверхности двухъ подобныхъ призмъ (или пирамидъ) соотвѣтственно равны $S=16$ кв. дюйм. и $S_1=9$ кв. дюйм. Объемъ большаго тѣла $V=64$ кб. дюйм. Опредѣлить объемъ меньшаго тѣла.

611. Объемы двухъ подобныхъ призмъ (или пирамидъ) соотвѣтственно равны $V=80$ кб. фут. и $V_1=10$ кб. фут. Высота большей призмы (пирамиды) равна $H=6$ фут. Опредѣлить высоту меньшей призмы (или пирамиды).

612. Сходственныя ребра двухъ подобныхъ призмъ (или пирамидъ) равны соотвѣтственно $a=3$ дюйм. и $a_1=2$ дюйм. Объемъ большаго тѣла $V=54$ кб. дюйм. Опредѣлить объемъ меньшаго тѣла.

613. Измѣренія параллелепипеда 6 дюйм., 8 дюйм. и 10,5 дюйм. Опредѣлить измѣренія подобнаго ему параллелепипеда, діагональ котораго равна 54 дюйм.

614. Даны два подобныхъ прямоугольныхъ параллелепипеда. Высота одного $H=5$ дцм. служитъ одной изъ сторонъ основанія другого, а высота второго $h=4$ дцм. служитъ одной изъ сторонъ основанія перваго. Опредѣлить неизвѣстныя стороны основанія параллелепипедовъ.

615. Площадь основанія призмы $B=32$ кв. фут. Боковыя ребра, длина которыхъ $b=4$ фут., наклонены къ плоскости основанія подъ углами въ 45°. Опредѣлить объемъ призмы, подобной данной, и имѣющей высоту $h=3$ фут.

616. Двѣ правильныя треугольныя пирамиды подобны. Сторона основанія первой $a=3\sqrt{3}$ см., а высота $H=6$ см. Сторона основанія второй пирамиды равна высотѣ первой пирамиды. Опредѣлить объемъ второй пирамиды.

617. Площади параллельныхъ основаній усѣченной пирамиды $B=32$ кв. см. и $B_1=18$ кв. см. Плоскость, параллельная основаніямъ, дѣлитъ эту пирамиду на двѣ подобныя между собой части. Опредѣлить отношеніе отрѣзковъ, на которые высота пирамиды дѣлится проведенной плоскостью.

Правильные многогранники.

Многогранникъ называется *правильнымъ*, если всѣ его ребра, грани, плоскіе, двугранные и многогранные углы соотвѣтственно равны между собой.

Существуетъ *пять* слѣдующихъ правильныхъ многогранниковъ:

1) *Тетраэдръ* (четырегранникъ), ограниченный 4 правильными треугольниками; онъ, слѣдовательно, имѣетъ 3 грани, 6 реберъ и 4 трегранныхъ угла.

2) *Октаэдръ* (восьмигранникъ), ограниченный 8 правильными треугольниками; онъ, слѣдовательно, имѣетъ 8 граней, 12 реберъ и 6 четырегранныхъ угловъ.

3) *Икосаэдръ* (двадцатигранникъ), ограниченный 20 правильными треугольниками; онъ, слѣдовательно, имѣетъ 20 граней, 30 реберъ и 12 пятигранныхъ угловъ.

4) *Эксаэдръ* (шестигранникъ, *кубъ*), ограниченный шестью квадратами; онъ, слѣдовательно, имѣетъ 6 граней, 12 реберъ и 8 трегранныхъ угловъ.

5) *Додекаэдръ* (двѣнадцатигранникъ), ограниченный 12 правильными пятиугольниками; онъ, слѣдовательно, имѣетъ 12 граней, 30 реберъ и 20 трегранныхъ угловъ.

При рѣшенiи нижеприводимыхъ задачъ примѣняются тѣ же прiемы, что и при опредѣленiи поверхностей и объемовъ пирамидъ.

Задачи, относящiяся къ кубу, разобраны ранѣе въ соотвѣтствующихъ отдѣлахъ.

618. Ребро тетраэдра a. Опредѣлить его поверхность и объемъ.

619. Тетраэдръ, ребро котораго a, раздѣленъ плоскостью, проходящей черезъ одно изъ его реберъ на двѣ равновеликiя части. Опредѣлить площадь образовавшагося сѣченiя.

620. Ребро тетраэдра a. Внутри его взята точка, одинаково удаленная отъ каждаго изъ реберъ тетраэдра. Опредѣлить разстоянiе этой точки отъ ребра.

621. Ребро тетраэдра a. Внутри тетраэдра взята точка, находящаяся отъ вершинъ тетраэдра на одинаковомъ разстоянiи. Опредѣлить это разстоянiе.

622. Площадь грани тетраэдра Q. Внутри его взята точка, одинаково удаленная отъ граней тетраэдра. Опредѣлить это разстоянiе.

623. Два тетраэдра, ребра которыхъ одинаковы и равны a, приложены другъ къ другу такъ, что приложенныя грани ихъ сливаются. Точки пересѣченiя медiанъ шести боковыхъ граней служатъ вершинами треугольной призмы. Опредѣлить ея объемъ.

624. Ребро октаэдра a. Опредѣлить его поверхность и объемъ.

625. Дiагональ октаэдра d. Опредѣлить поверхность октаэдра.

626. Ребро октаэдра a. Опредѣлить длину его дiагонали.

627. Ребро октаэдра a. Опредѣлить разстоянiе точки пересѣченiя дiагоналей октаэдра отъ его грани.

628. Въ октаэдрѣ разстоянiе между центрами окружностей, вписанныхъ въ двѣ противоположныя и параллельныя между собой грани, равно m. Опредѣлить дiагональ октаэдра.

629. Въ октаэдрѣ, ребро котораго a, черезъ точку пересѣченiя его дiагоналей проведена плоскость параллельно одной изъ его граней. Опредѣлить площадь образовавшагося въ сѣченiи шестиугольника.

630. Въ октаэдрѣ, ребро котораго $a=5$ см., расположенъ кубъ, вершины котораго лежатъ на ребрахъ октаэдра. Опредѣлить объемъ куба.

631. Въ октаэдрѣ, ребро котораго a, расположенъ кубъ такъ, что его вершины лежатъ на апоѳемахъ боковыхъ граней октаэдра. Опредѣлить объемъ этого куба.

632. Въ октаэдрѣ, ребро котораго $a=3\sqrt{2}$ дцм., срѣзаны углы плоскостями, проходящими черезъ средины реберъ, выходящихъ изъ общей вершины. Опредѣлить поверхность и объемъ образовавшагося тѣла.

633. Отъ октаэдра, ребро котораго a, отсѣчены углы плоскостями такъ, что изъ каждой грани его образовались правильные шестиугольники. Опредѣлить поверхность и объемъ полученнаго тѣла.

634. Ребро правильнаго икосаэдра a. Опредѣлить его поверхность и объемъ.

635. Ребро икосаэдра a. Опредѣлить длину его большей дiагонали.

636. Ребро икосаэдра a. Опредѣлить разстоянiе точки пересѣченiя дiагоналей икосаэдра отъ одной изъ его граней.

637. Ребро додекаэдра a. Опредѣлить его поверхность и объемъ.

638. Ребро додекаэдра a. Опредѣлить длину его большей дiагонали.

639. Ребро додекаэдра a. Опредѣлить разстоянiе точки пересѣченiя дiагоналей додекаэдра отъ одной изъ его граней.

КРУГЛЫЯ ТѢЛА.

Цилиндръ.

Поверхность цилиндра.

Боковая поверхность цилиндра выражается произведеніемъ длины окружности его основанія на высоту; обозначивъ радіусъ основанія цилиндра буквой r, а высоту — буквой H, имѣемъ формулу

$$S_б = 2\pi r H.$$

Полная поверхность цилиндра получится, если къ боковой его поверхности прибавить сумму площадей основаній цилиндра, т.-е.

$$S = S_б + 2\pi r^2 = 2\pi r(H + r).$$

640. Радіусъ основанія цилиндра $r=3$ дцм., а высота $H=5$ дцм. Опредѣлить боковую и полную поверхность цилиндра.

641. Поверхность цилиндра $S=64\pi$ кв. см., а радіусъ основанія $r=4$ см. Опредѣлить высоту цилиндра.

642. Поверхность цилиндра $S=28\pi$ кв. дцм., а высота $H=5$ см. Опредѣлить радіусъ основанія цилиндра.

643. Боковая поверхность цилиндра $S_б=35\pi$ кв. дцм., а высота $H=3,5$ дцм. Опредѣлить радіусъ основанія цилиндра.

644. Боковая поверхность цилиндра $S_б= 12\pi$ кв. фут., а радіусъ основанія $r=2$ фут. Опредѣлить высоту цилиндра.

645. Боковая поверхность цилиндра $S_б=72\pi$ кв. см., а полная поверхность $S=104\pi$ кв. см. Опредѣлить высоту цилиндра.

646. Высота цилиндра $H=8$ см., а отношеніе его боковой поверхности къ полной равно $m:n=4:7$. Опредѣлить боковую поверхность цилиндра.

647. Высота цилиндра равна радіусу его основанія. Опредѣлить отношеніе боковой поверхности цилиндра къ его полной поверхности.

648. Радіусъ основанія цилиндра $r=2$ дцм. Площадь его осевого сѣченія равна площади основанія. Опредѣлить поверхность цилиндра.

Объемъ цилиндра.

Объемъ цилиндра выражается произведеніемъ площади его основанія на высоту.

Пользуясь вышеуказанными обозначеніями, будемъ имѣть;

$$V = \pi r^2 H.$$

649. Радіусъ основанія цилиндра $r=2$ см., а высота $H=5$ см. Опредѣлить объемъ цилиндра.

650. Поверхность цилиндра $S=12$ кв. арш., а радіусъ основанія $r=2$ арш. Опредѣлить объемъ цилиндра.

651. Боковая поверхность $S_б=48$ кв. дцм., а высота $H=6$ дцм. Опредѣлить объемъ цилиндра.

652. Объемъ цилиндра $V=236$ кв. дюйм., а радіусъ основанія цилиндра $r=8$ дюйм. Опредѣлить боковую поверхность цилиндра.

653. Высота цилиндра $H=6,5$ см., а его объемъ $V=248$ кб. см. Опредѣлить боковую поверхность цилиндра.

654. Опредѣлить объемъ цилиндра, боковая поверхность котораго $S_б=16\pi$ кв. дюйм., а высота $H=8$ дюйм.

655. Поверхность цилиндра $S=28\pi$ кв. см., а высота $H=5$ см. Опредѣлить объемъ цилиндра.

656. Боковая поверхность цилиндра $S_б=22$ кв. дюйм., а радіусъ основанія $r=5$ дюйм. Опредѣлить объемъ цилиндра.

657. Объемъ цилиндра $V=225$ кб. фут. Осевое сѣченіе цилиндра — квадратъ. Опредѣлить поверхность цилиндра.

658. Объемъ цилиндра $V=54\pi$ кб. см., а боковая поверхность $S_б=36\pi$ кв. см. Опредѣлить полную поверхность цилиндра и его высоту.

659. Боковая поверхность цилиндра $S_б=48\pi$ кв. дюйм., а полная поверхность $S=66\pi$ кв. дюйм. Опредѣлить объемъ цилиндра.

660. Объемъ цилиндра $V=1701\pi$ кб. фут., а отношеніе высоты цилиндра къ радіусу его основанія равно $m:n=7:3$. Опредѣлить боковую поверхность цилиндра.

Сѣченіе цилиндра плоскостью.

Въ задачахъ этого отдѣла разсмотрѣны сѣченія цилиндра плоскостью, проходящей черезъ ось цилиндра или параллельной ей.

661. Поверхность цилиндра $S=168\pi$ кв. см., а діагональ его осевого сѣченія $d=10$ см. Опредѣлить объемъ цилиндра, если высота цилиндра больше діаметра его основанія.

662. Осевое сѣченіе цилиндра равновелико суммѣ его основаній. Опредѣлить отношеніе радіуса основанія цилиндра къ его высотѣ.

663. Площадь основанія цилиндра $B=10$ кв. см., а площадь осевого сѣченія $Q=25$ кв. см. Опредѣлить боковую поверхность и объемъ цилиндра.

664. Площадь осевого сѣченія цилиндра $Q=8\sqrt{3}$ кв. дюйм. Черезъ средину радіуса основанія цилиндра, перпендикулярнаго къ этому осевому сѣченію, проведено другое сѣченіе, параллельно первому. Опредѣлить его площадь.

665. Радіусъ основанія цилиндра $r=5$ см., а высота $H=8$ см. Параллельно оси цилиндра проведена плоскость такъ, что площадь образовавшагося сѣченія $Q=16\sqrt{21}$ кв. см. Опредѣлить разстояніе этой плоскости отъ оси цилиндра.

666. Цилиндръ пересѣченъ плоскостью, проведенной параллельно оси на разстояніи $m=3$ см. отъ нея. Площадь полученнаго сѣченія $Q=48$ кв. см., а діагональ сѣченія $d=10$ см. Опредѣлить высоту и радіусъ основанія цилиндра.

667. Радіусъ основанія цилиндра $r=3$ см., а высота его $H=5$ см. Параллельно оси цилиндра, въ разстояніи отъ оси, равномъ половинѣ радіуса, проведена плоскость. Опредѣлить полныя поверхности образовавшихся частей цилиндра.

668. Радіусъ основанія цилиндра $r=8$ см., а высота $H=10$ см. Черезъ ось цилиндра проведены двѣ плоскости подъ угломъ въ 20° другъ къ другу. Опредѣлить полную поверхность меньшей части цилиндра, заключенной между этими плоскостями.

669. Радіусъ основанія цилиндра $r=3$ см. Цилиндръ пересѣченъ плоскостью, образующей съ осью цилиндра уголъ въ 45°. Опредѣлить боковую поверхность и объемъ оставшейся части, если наименьшее разстояніе сѣченія отъ плоскости основанія равно $m=5$ см.

Цилиндръ, вписанный въ призму и описанный около нея.

Въ нижеприводимыхъ задачахъ приходится опредѣлять поверхность и объемъ призмъ и цилиндровъ, пользуясь зависимостью между элементами этихъ тѣлъ.

670. Опредѣлить боковую поверхность цилиндра, описаннаго около правильной треугольной призмы, сторона основанія которой $a=5$ см.; а высота $H=8$ см.

671. Основаніемъ прямой призмы служитъ треугольникъ со сторонами $a=13$ см., $b=20$ см. и $c=21$ см., высота призмы $H=16$ см. Около этой призмы описанъ цилиндръ. Опредѣлить его объемъ.

672. Сторона основанія правильной треугольной призмы $a=2$ см., а высота $H=5$ см. Опредѣлить боковую поверхность и объемъ цилиндра, вписаннаго въ эту призму.

673. Въ кубъ съ ребромъ $a=3$ дюйм. вписанъ цилиндръ. Опредѣлить его поверхность.

674. Около куба съ ребромъ $a=2$ см. описанъ цилиндръ. Опредѣлить объемъ этого цилиндра.

675. Радіусъ основанія цилиндра $r=2\sqrt{2}$ см., а его высота $h=4$ см. Въ этотъ цилиндръ вписана правильная четыреугольная призма. Опредѣлить площадь ея боковой грани.

676. Опредѣлить боковую поверхность и объемъ цилиндра, вписаннаго въ правильную четыреугольную призму, сторона основанія которой $a=2$ дцм., а высота $H=4$ дцм.

677. Опредѣлить поверхность и объемъ цилиндра, описаннаго около прямоугольнаго параллелепипеда, стороны основанія котораго $a=3$ см. и $b=4$ см., а высота $H=7$ см.

678. Сторона основанія правильной призмы a, а ея высота H. Опредѣлить боковую поверхность и объемъ цилиндра, вписаннаго въ эту призму, если призма 1) шестиугольная, 2) десятиугольная.

679. Сторона основанія правильной призмы a, а высота H. Опредѣлить боковую поверхность и объемъ цилиндра, описаннаго около этой призмы, если призма 1) шестиугольная, 2) десятиугольная.

680. Около цилиндра, объемъ котораго $V=40$ кб. см., а высота $H=5$ см., описана призма, боковая поверхность которой $S_6=$ $=28$ кв. см. Опредѣлить объемъ призмы.

Развертка цилиндра.

При рѣшеніи нижеприводимыхъ задачъ слѣдуетъ имѣть въ виду, что развертка боковой поверхности цилиндра въ плоскость представляетъ собой прямоугольникъ, основаніе котораго равно длинѣ окружности основанія цилиндра а высота — высотѣ цилиндра.

681. Развертка боковой поверхности цилиндра въ плоскость представляетъ собой прямоугольникъ со сторонами $a=4$ см. и $b=5$ см. Опредѣлить объемъ этого цилиндра.

682. Периметръ развертки въ плоскость боковой поверхности цилиндра $2p=24$ дцм., а площадь развертки $M=35$ кв. дцм. Опредѣлить объемъ цилиндра.

683. Осевое сѣченіе цилиндра — квадратъ со стороной $a=3$ см. Опредѣлить периметръ развертки въ плоскость боковой поверхности цилиндра.

684. Радіусъ основанія цилиндра $r=2$ фут. Діагональ, проведенная въ разверткѣ въ плоскость боковой поверхности цилиндра, составляетъ съ его образующей уголъ въ 60°. Опредѣлить высоту цилиндра.

685. Объемъ цилиндра $V=3{,}82$ куб. дцм., а его боковая поверхность $S_б=12$ кв. дцм. Опредѣлить длину діагонали въ разверткѣ въ плоскость его боковой поверхности.

Конусъ полный и усѣченный.

Поверхность конуса.

Боковая поверхность конуса выражается произведеніемъ длины окружности его основанія на половину образующей конуса.

Обозначивъ радіусъ основанія конуса буквой r, а образующую — буквой l, получимъ формулу

$$S_б=2\pi r\cdot\frac{l}{2}=\pi rl.$$

Полная поверхность конуса получится, если къ боковой его поверхности прибавить площадь его основанія, т.-е.

$$S=S_б+\pi r^2=\pi rl+\pi r^2=\pi r(l+r).$$

686. Радіусъ основанія конуса $r=2$ дцм., а его образующая $l=5$ дцм. Опредѣлить поверхность конуса.

687. Радіусъ основанія конуса $r=6$ см., а высота $H=8$ см. Опредѣлить поверхность конуса.

688. Образующая конуса $l=5$ см., а его высота $H=4$ см. Опредѣлить боковую поверхность конуса.

689. Боковая поверхность конуса $S_б=65\pi$ кв. дцм., а радіусъ его основанія $r=5$ дцм. Опредѣлить высоту конуса.

690. Поверхность конуса $S=90\pi$ кв. см., а его образующая $l=13$ см. Опредѣлить радіусъ основанія конуса.

691. Опредѣлить боковую поверхность конуса, высота котораго $H=3$ фут., а образующая составляетъ съ плоскостью основанія уголъ въ 60°.

692. Боковая поверхность конуса $S_б=260\pi$ кв. см., а полная поверхность $S=360\pi$ кв. см. Опредѣлить образующую и высоту конуса.

693. Образующая конуса равна діаметру его основанія. Опредѣлить отношеніе боковой поверхности этого конуса къ его полной поверхности.

Объемъ конуса.

Объемъ конуса выражается произведеніемъ площади его основанія на треть высоты, т.-е. $V=\frac{\pi r^2H}{3}$, гдѣ H—высота конуса.

694. Радіусъ основанія конуса 8 дюйм., а его высота $H=15$ дюйм. Опредѣлить объемъ конуса.

695. Объемъ конуса $V=12\pi$ кб. фут., а высота конуса $H=4$ фут. Опредѣлить боковую поверхность конуса.

696. Объемъ конуса $V=350$ кб. дюйм., а радіусъ его основанія $r=3$ дюйм. Опредѣлить поверхность конуса.

697. Радіусъ основанія конуса $r=3$ фут., а его образующая $l=5$ фут. Опредѣлить объемъ конуса.

698. Боковая поверхность конуса $S_б=30\pi$ кв. дюйм., а его высота $H=4$ дюйм. Опредѣлить объемъ конуса.

699. Поверхность конуса $S=360\pi$ кв. фут., а его образующая $l=24$ фут. Опредѣлить объемъ конуса.

700. Поверхность конуса $S=90\pi$ кв. метр., а радіусъ его основанія $r=5$ метр. Опредѣлить объемъ конуса.

701. Объемъ конуса $V=81\pi$ кб. дюйм. Боковая поверхность вдвое больше площади основанія конуса. Опредѣлить радіусъ основанія и высоту конуса.

702. Объемъ конуса V, а площадь его основанія B. Опредѣлить боковую поверхность конуса.

703. Объемъ конуса V. Отношеніе высоты конуса къ образующей равно $m:n$. Опредѣлить радіусъ основанія конуса.

Конусъ, вписанный въ пирамиду и описанный около нея.

Въ нижеприводимыхъ задачахъ приходится опредѣлять поверхность и объемъ пирамидъ и конусовъ, пользуясь зависимостью между элементами этихъ тѣлъ.

704. Въ треугольной пирамидѣ всѣ ребра одинаковы. Одинъ конусъ вписанъ въ эту пирамиду, а другой описанъ около нея. Опредѣлить отношеніе объемовъ этихъ конусовъ.

705. Опредѣлить боковую поверхность и объемъ конуса, вписаннаго въ правильную треугольную пирамиду, сторона основанія которой $a=3$ см., а высота $H=7$ см.

706. Опредѣлить боковую поверхность и объемъ конуса, описаннаго около правильной треугольной пирамиды, сторона основанія которой $a=6$ дюйм., а высота $H=8$ дюйм.

707. Около конуса, радіусъ основанія котораго $r=3$ дюйм., а высота $H=4$ дюйм., описана правильная четыреугольная пирамида. Опредѣлить ея боковую поверхность.

708. Около правильной четыреугольной пирамиды, сторона основанія которой $a=2$ фут., а высота $H=5$ фут., описанъ конусъ. Опредѣлить его боковую поверхность и объемъ.

709. Опредѣлить боковую поверхность и объемъ конуса, вписаннаго въ правильную пирамиду, сторона которой a, а высота H, если пирамида 1) шестиугольная, 2) десятиугольная.

710. Опредѣлить боковую поверхность и объемъ конуса, описаннаго около правильной пирамиды, сторона основанія которой a, а высота H, если пирамида 1) шестиугольная, 2) десятиугольная.

Поверхность усѣченнаго конуса.

Боковая поверхность усѣченнаго конуса выражается произведеніемъ полусуммы окружностей его основаній на образующую, т.-е.

$$S_б=\pi(r_1+r_2)l,$$

гдѣ r_1 и r_2 — радіусы основаній усѣченнаго конуса.

Полная поверхность усѣченнаго конуса получится, если къ боковой его поверхности прибавить сумму площадей основаній усѣченнаго конуса, т.-е.

$$S=S_б+2\pi(r_1^2+r_2^2)=\pi(r_1+r_2)l+2\pi(r_1^3+r_2^2).$$

711. Образующая усѣченнаго конуса $l=6$ см., а радіусы его основаній $r=4$ см. и $r_1=1$ см. Опредѣлить поверхность конуса.

712. Высота усѣченнаго конуса $H=3$ см., а радіусы его основаній $r=8$ см. и $r_1=2$ см. Опредѣлить боковую поверхность этого конуса.

713. Боковая поверхность усѣченнаго конуса $S_б=120$ кв. см., а площади основаній $B=49$ кв. см. и $B_1=25$ кв. см. Опредѣлить высоту конуса.

714. Боковая поверхность усѣченнаго конуса $S_б=30{,}62$ кв. см., полная поверхность $S=43{,}96$ кв. см., а образующая $l=3{,}9$ см. Опредѣлить радіусы основаній этого конуса.

715. Боковая поверхность усѣченнаго конуса $S_б=440$ кв см., а высота $H=8$ см. Опредѣлить радіусы основаній усѣченнаго конуса, если ихъ отношеніе $m:n=5:2$.

716. Боковая поверхность усѣченнаго конуса $S_б=120\pi$ кв. см., его полная поверхность $S=224\pi$ кв. см., а радіусъ большаго основанія $r=10$ см. Опредѣлить образующую и высоту этого конуса.

717. Опредѣлить боковую поверхность усѣченнаго конуса, въ которомъ діаметръ меньшаго основанія равенъ образующей, высота $H=5$ дцм., периметръ осевого сѣченія $2p=20$ дцм.

718. Боковая поверхность усѣченнаго конуса $S_б=10$ кв. дюйм., а площади его основаній $B=11$ кв дюйм и $B_1=5$ кв. дюйм. Опредѣлить площадь осевого сѣченія конуса.

719. Длины окружностей основаній усѣченнаго конуса $c=16{,}8$ метр. $c_1=14{,}6$ метр., а площадь осевого сѣченія $Q=240$ кв. метр. Опредѣлить боковую поверхность усѣченнаго конуса.

720. Радіусы основаній усѣченнаго конуса $r=6$ см. и $r_1=5$ см., а діагональ осевого сѣченія конуса $d=31$ см. Опредѣлить боковую поверхность усѣченнаго конуса.

Объемъ усѣченнаго конуса.

Объемъ усѣченнаго конуса равенъ суммѣ объемовъ трехъ конусовъ, у которыхъ высоты одинаковы съ высотой усѣченнаго конуса, а основаніями служатъ у перваго — большее основаніе усѣченнаго конуса, у второго — меньшее, а у третьяго — средне-пропорціональное между ними, т.-е.

$$V=\frac{\pi r_1^2H}{3}+\frac{\pi r_2^2H}{3}+\frac{\pi r_1r_2H}{3}=\frac{\pi H}{3}(r_1^2+r_2^2+r_1r_2).$$

721. Радіусы основаній усѣченнаго конуса $r=5$ см. и $r_1=3$ см., а высота $H=3$ см. Опредѣлить объемъ усѣченнаго конуса.

722. Объемъ усѣченнаго конуса 672π кб. дцм., его высота 8 дцм., а радіусъ одного изъ основаній 12 дцм. Опредѣлить радіусъ другого основанія.

723. Радіусы основаній усѣченнаго конуса $r=3$ см. и $r_1=1$ см., а образующая составляетъ съ плоскостью основанія уголъ въ $60°$. Опредѣлить объемъ конуса.

724. Объемъ усѣченнаго конуса $V=109$ кб. дюйм., а площади основаній $B=49$ кв. дюйм. и $B_1=25$ кв. дюйм. Опредѣлить высоту конуса.

725. Радіусы основаній усѣченнаго конуса $r=4$ дцм. и $r_1=3$ дцм., а образующая $l=2$ дцм. Опредѣлить объемъ этого конуса.

726. Образующая усѣченнаго конуса $l=5$ см.; радіусы основаній конуса $r=3$ см. и $r_1=2$ см. Опредѣлить объемъ конуса.

727. Высота усѣченнаго конуса $H=17,5$ см., образующая $l=18,5$ см., а боковая поверхность $S_б=296\pi$ кв. см. Опредѣлить объемъ.

728. Радіусы основаній усѣченнаго конуса $r=6$ см. и $r_1=3$ см., а его боковая поверхность $S_б=89\pi$ кв. см. Опредѣлить объемъ этого конуса.

729. Объемъ усѣченнаго конуса 880π кб. дюйм., а радіусы его основаній $r=12$ дюйм. и $r_1=6$ дюйм. Опредѣлить боковую поверхность конуса.

730. Радіусы основаній усѣченнаго конуса $r=5$ см. и $r_1=3$ см.; разность между образующей и высотой конуса $d=1$ см. Опредѣлить объемъ усѣченнаго конуса.

731. Объемъ усѣченнаго конуса $V=52\pi$ кб. фут., его высота $H=4$ фут., образующая $l=5$ фут. Опредѣлить радіусы основаній этого конуса, если ихъ отношеніе $m:n=2:5$.

Усѣченный конусъ, вписанный въ усѣченную пирамиду и описанный около нея.

Въ нижеприводимыхъ задачахъ приходится опредѣлять поверхность и объемъ усѣченныхъ пирамидъ и усѣченныхъ конусовъ, пользуясь зависимостью между элементами этихъ тѣлъ.

732. Въ правильную треугольную усѣченную параллельно основанію пирамиду, высота которой $H=12$ см., а стороны основаній $a=6$ см., и $a_1=4$ см. вписанъ усѣченный конусъ. Опредѣлить его поверхность и объемъ.

733. Около правильной треугольной усѣченной параллельно основанію пирамиды, высота которой $H=4$ дцм., а стороны основаній $a=5$ дцм. и $a_1=3$ дцм., описанъ усѣченный конусъ. Опредѣлить его поверхность и объемъ.

734. Дана правильная, усѣченная параллельно основанію, четырехугольная пирамида, высота которой H, а стороны основаній a и a_1. Опредѣлить поверхность и объемъ усѣченнаго конуса 1) вписаннаго въ эту пирамиду и 2) описаннаго около нея.

735. Дана правильная усѣченная параллельно основанію шестиугольная пирамида, высота которой H, а стороны основаній a и a_1. Опредѣлить поверхность и объемъ усѣченнаго конуса 1) вписаннаго въ эту пирамиду и 2) описаннаго около нея.

Развертка конуса.

При рѣшеніи нижеприводимыхъ задачъ слѣдуетъ имѣть въ виду, что развертка въ плоскость боковой поверхности конуса представляетъ собой круговой секторъ, длина дуги котораго равна длинѣ окружности основанія конуса, а радіусъ — образующей конуса.

При опредѣленіи градусной мѣры центральнаго угла развертки въ плоскость боковой поверхности конуса примѣняется формула $n°=\frac{360°.S}{\pi l^2}$, гдѣ S — площадь сектора (она же и боковая поверхность конуса), а l — радіусъ сектора (онъ же — образующая конуса)

Площадь развертки (сектора) выражается формулой $S=\frac{s.l}{2}$, гдѣ s — длина дуги сектора (она же — длина окружности основанія конуса).

736a. Осевое сѣченіе конуса представляетъ собой равносторонній треугольникъ. Опредѣлить центральный уголъ развертки конуса.

736b. Боковая поверхность конуса вдвое больше площади его основанія. Опредѣлить центральный уголъ развертки конуса.

737. Объемъ конуса $V=288\pi$ кб. вершк., а образующая конуса $l=10$ вершк. Опредѣлить центральный уголъ развертки въ плоскость боковой поверхности конуса.

738. Радіусъ основанія конуса $r=2$ дюйм., а уголъ развертки его боковой поверхности въ плоскость содержитъ 90°. Опредѣлить объемъ конуса.

739. Боковая поверхность конуса $S_б = 9{,}9\pi$ кв. фут.; если развернуть ее въ плоскость, то она представитъ собой круговой секторъ съ угломъ при вершинѣ въ 36°. Опредѣлить объемъ конуса.

740. Боковая поверхность конуса при разверткѣ въ плоскость образуетъ секторъ съ центральнымъ угломъ въ $n°$. Опредѣлить объемъ конуса, если его высота H.

741. Боковая поверхность конуса, будучи развернута въ плоскость, представляетъ собой круговой секторъ, радіусъ котораго r, а уголъ при вершинѣ $n°$. Опредѣлить объемъ этого конуса.

742. Боковая поверхность усѣченнаго конуса $S_б=4{,}5$ кв. фут., отношеніе радіусовъ основаній конуса равно $m:n=2:1$, а образующая конуса $l=2$ фут. Подъ какимъ угломъ пересѣкаются продолженія прямыхъ, ограничивающихъ развертку въ плоскость боковой поверхности конуса?

Сѣченіе конуса плоскостью.

Въ нижеприводимыхъ задачахъ разсмотрѣны сѣченія конуса плоскостью, проходящей черезъ ось конуса, или параллельной его основанію.

Если сѣкущая плоскость параллельна плоскости основанія конуса, то площадь полученнаго сѣченія относится къ площади основанія конуса, какъ квадраты ихъ разстояній отъ вершины конуса.

743. Осевое сѣченіе конуса представляетъ собой равносторонній треугольникъ съ площадью $\triangle=9$ кв. дюйм. Опредѣлить объемъ конуса.

744. Площадь осевого сѣченія конуса $Q=27$ кв. дюйм., а площадь его основанія $B=16\pi$ кв. дюйм. Опредѣлить объемъ конуса.

745. Радіусъ основанія конуса $r=4$ см., а площадь осевого сѣченія $Q=6$ кв. см. Опредѣлить поверхность и объемъ конуса.

746. Черезъ вершину конуса, высота котораго $H=2\sqrt{10}$ см., а радіусъ основанія $r=5$ см., проведена плоскость, пересѣкающая основаніе конуса по хордѣ, длина которой $m=8$ см. Опредѣлить площадь полученнаго сѣченія.

747. Плоскость, проведенная черезъ вершину конуса, пересѣкаетъ основаніе по хордѣ, длина которой равна радіусу этого основанія. Опредѣлить отношеніе объемовъ образовавшихся частей конуса.

748. Конусъ, высота котораго $H=4\sqrt{2}$ см., пересѣченъ плоскостью, параллельной основанію, такъ, что боковая поверхность конуса раздѣлилась пополамъ. Опредѣлить разстояніе этой плоскости отъ вершины конуса.

749. Плоскость, параллельная основанію конуса, дѣлитъ высоту конуса на двѣ равныя части. Опредѣлить площадь образовавшагося сѣченія, если радіусъ основанія конуса $r=4$ см.

750. Черезъ средину высоты конуса, образующая котораго $l=6$ см., проведена плоскость параллельно основанію. Опредѣлить объемъ конуса, если площадь проведеннаго сѣченія $Q=23\pi$ кв. см.

751. Конусъ, радіусъ основанія котораго $r=3$ фут., раздѣленъ пополамъ плоскостью, параллельной основанію. Опредѣлить площадь образовавшагося сѣченія.

752. Объемъ конуса $V=250$ кб. см., а его высота $H=5$ см. Конусъ пересѣченъ плоскостью, параллельной основанію и отстоящей отъ него на $m=2$ см. Опредѣлить площадь образовавшагося сѣченія.

753. Плоскость, параллельная основанію конуса, дѣлитъ его объемъ въ отношеніи $m:n=3:5$ (меньшая часть при вершинѣ конуса). Опредѣлить разстояніе этой плоскости отъ вершины конуса, если высота его $H=6$ фут.

754. Усѣченный конусъ, радіусы основаній котораго $r=8$ см. и $r_1=2$ см., а высота $H=8$ см. пересѣченъ плоскостью, параллельной основаніямъ, такъ, что площадь образовавшагося сѣченія равна полусуммѣ площадей основаній. Опредѣлить боковую поверхность отсѣченной части, прилежащей къ меньшему основанію.

Комбинаціи цилиндра и конуса.

При рѣшеніи нижеприводимыхъ задачъ, выполнивъ тщательно чертежъ, слѣдуетъ разсмотрѣть, какую именно комбинацію круглыхъ тѣлъ представляетъ данный случай; послѣ этого возможно примѣнить соотвѣтствующія формулы и теоремы.

755. Цилиндръ пересѣченъ плоскостью, параллельной основанію. Полученное сѣченіе служитъ общимъ основаніемъ двухъ конусовъ, вершины которыхъ находятся въ центрахъ основаній цилиндра.

Опредѣлить отношеніе суммы объемовъ этихъ конусовъ къ объему цилиндра.

756. На меньшее основаніе усѣченнаго конуса поставленъ цилиндръ, радіусъ основанія котораго равенъ радіусу меньшаго основанія усѣченнаго конуса. Опредѣлить высоту цилиндра, если боковая поверхность полученнаго тѣла $S_б=1210$ кв. дцм., высота усѣченнаго конуса $H=12$ дцм., а радіусъ меньшаго основанія конуса $r_1=8$ дцм.

757. Радіусъ основанія цилиндра $r=3$ дцм., а высота его $H=5$ дцм. На основаніяхъ цилиндра, внѣ его, построены два конуса, высоты которыхъ равны радіусу основанія цилиндра. Опредѣлить поверхность и объемъ получившагося тѣла.

758. На цилиндръ, радіусъ основанія котораго $r=2$ дюйм., а высота равна радіусу основанія, поставленъ конусъ такъ, что оси обоихъ тѣлъ совпадаютъ. Высота конуса равна высотѣ цилиндра, а радіусъ основанія конуса вдвое меньше его высоты. Опредѣлить поверхность полученнаго тѣла.

759. Одно изъ основаній цилиндра служитъ большимъ основаніемъ усѣченнаго конуса; меньшее основаніе конуса лежитъ въ плоскости другого основанія цилиндра. Опредѣлить радіусъ меньшаго основанія усѣченнаго конуса, если его объемъ вдвое меньше объема цилиндра, а радіусъ большаго основанія $r=2{,}73$ дцм.

760. Основаніе цилиндра служитъ большимъ основаніемъ усѣченнаго конуса; площадь этого основанія равна 36π кв. см. Опредѣлить радіусъ меньшаго основанія усѣченнаго конуса, если оба тѣла имѣютъ общую высоту и объемы ихъ относятся, какъ $27:19$.

761. Радіусъ основанія конуса $r=96$ см., а его высота $H=24$ см. Въ этомъ конусѣ расположенъ цилиндръ такъ, что одно его основаніе совпадаетъ съ основаніемъ конуса, а окружность другого основанія сливается съ боковой поверхностью конуса. Опредѣлить высоту цилиндра, если его поверхность равна площади основанія конуса.

762. Въ усѣченномъ конусѣ расположенъ цилиндръ такъ, что однимъ изъ его основаній служитъ меньшее основаніе усѣченнаго конуса, а другое основаніе лежитъ въ плоскости большаго основанія конуса. Опредѣлить отношеніе радіусовъ основаній усѣченнаго конуса, если отношеніе его объема къ объему цилиндра равно $m:n=3:1$.

763. Радіусы основаній усѣченнаго конуса равны $r=7$ см. и $r_1=3$ см. Каждое изъ основаній служитъ въ то же время основаніемъ полнаго конуса, вершина котораго находится въ центрѣ другого основанія. Опредѣлить радіусъ окружности, образованной пересѣченіемъ боковыхъ поверхностей этихъ конусовъ.

764. Радіусъ основанія цилиндра $r=24$ см., а высота $H=70$ см. Основанія цилиндра служатъ основаніями конусовъ, вершины которыхъ находятся соотвѣтственно въ центрахъ противоположныхъ основаній цилиндра. Опредѣлить поверхность и объемъ части, общей обоимъ конусамъ.

765. Даны двѣ концентрическія окружности, радіусы которыхъ $r=5$ см. и $r_1=2$ см. Большій изъ полученныхъ круговъ служитъ основаніемъ конуса съ высотой, равной радіусу его основанія, а меньшій — основаніемъ цилиндра, высота котораго одинакова съ высотой конуса. Опредѣлить поверхность и объемъ части, общей обоимъ тѣламъ.

Отношеніе поверхностей и объемовъ цилиндра и конуса.

При рѣшеніи нижепомѣщенныхъ задачъ приходится пользоваться тѣми или иными комбинаціями формулъ, служащихъ для выраженія поверхностей и объемовъ цилиндра и конуса.

766. Два цилиндра имѣютъ одинаковую боковую поверхность. Опредѣлить отношеніе ихъ объемовъ, если радіусы ихъ основаній относятся, какъ $m:n=3:5$.

767. Два цилиндра имѣютъ одинаковый объемъ. Опредѣлить отношеніе ихъ боковыхъ поверхностей, если отношеніе высотъ цилиндровъ равно $m:n=4:9$.

768. Боковая поверхность конуса $S_б=260\pi$ кв. дюйм.; его высота $H=24$ дюйм. Опредѣлить боковую поверхность цилиндра, имѣющаго съ конусомъ одинаковыя основанія и высоту.

769. Осевое сѣченіе конуса — равносторонній треугольникъ, а осевое сѣченіе цилиндра — квадратъ; объемы обоихъ тѣлъ одинаковы. Опредѣлить отношеніе ихъ поверхностей.

770. Поверхности цилиндра и конуса равны между собой. Образующая конуса равна діаметру основанія конуса, а образующая цилиндра равна діаметру основанія цилиндра. Опредѣлить отношеніе объемовъ этихъ тѣлъ.

771. Радіусъ основанія конуса $r=2$ дюйм., а его высота $H=4$ дюйм. Радіусъ основанія другого конуса равенъ высотѣ перваго, а высота

второго — радіусу основанія перваго. Опредѣлить отношеніе поверхностей и объемовъ этихъ конусовъ.

772. Два конуса имѣютъ общее основаніе, радіусъ котораго $r=10$ см. Сумма объемовъ этихъ конусовъ $V=450\pi$ кб. см. Высоты конусовъ относятся, какъ $m:n=4:5$. Опредѣлить эти высоты.

Тѣла вращенія, приводимыя къ цилиндрамъ и конусамъ.

При рѣшеніи задачъ на опредѣленіе поверхности и объема тѣлъ вращенія необходимо прежде всего тщательно выполнить соотвѣтствующій чертежъ для того, чтобы легче было выяснить видъ тѣла вращенія.

Слѣдуетъ помнить, что во всѣхъ задачахъ вращающаяся плоская фигура предполагается лежащей въ одной плоскости съ осью вращенія.

Общій пріемъ построенія всякаго тѣла вращенія состоитъ въ слѣдующемъ:

Изобразивъ на чертежѣ данный многоугольникъ (въ частности треугольникъ, ромбъ, трапецію и т. п.) и проведя (согласно условіямъ задачи) ось вращенія, опускаютъ на нее перпендикуляры изъ каждой вершины многоугольника и продолжаютъ ихъ за ось на разстояніе, равное разстоянію этихъ вершинъ отъ оси. Точки, полученныя такимъ образомъ по другую сторону оси, соединяютъ послѣдовательно между собой, послѣ чего образуется многоугольникъ, симметричный данному относительно оси вращенія. Каждая точка даннаго многоугольника (кромѣ точекъ, совпадающихъ съ осью вращенія), вращаясь около оси, опишетъ окружность, центръ которой будетъ находиться на оси вращенія, а радіусомъ будетъ служить разстояніе этой точки отъ оси. Окружности, получаемыя отъ вращенія вершинъ даннаго многоугольника около оси, принято изображать въ видѣ такъ называемыхъ *эллипсовъ*.

Выполнивъ указаннымъ образомъ чертежъ, слѣдуетъ выяснить видъ тѣла вращенія, т.-е. опредѣлить, представляетъ ли полученное тѣло цилиндръ, конусъ, усѣченный конусъ, или же — ту или иную комбинацію этихъ круглыхъ тѣлъ. Для рѣшенія этого вопроса приходится разсматривать, какая поверхность образуется вращеніемъ каждой изъ сторонъ даннаго многоугольника. Послѣ этого возможно достаточно ясно представить себѣ видъ тѣла вращенія и сдѣлать

выводъ, изъ какихъ отдѣльныхъ объемовъ круглыхъ тѣлъ будетъ состоять объемъ тѣла вращенія.

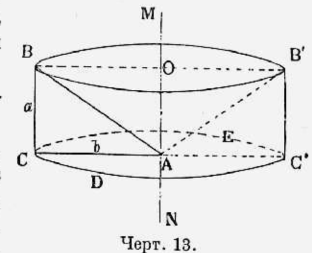
Замѣчаніе. Слѣдуетъ помнить, что поверхность тѣла вращенія всегда состоитъ изъ суммы поверхностей, образованныхъ вращеніемъ отдѣльныхъ отрѣзковъ даннаго многоугольника, тогда какъ объемъ можетъ составиться какъ изъ суммы, такъ и изъ разности объемовъ тѣлъ, получаемыхъ отъ вращенія отдѣльныхъ частей фигуры около данной оси.

Исключеніемъ изъ сказаннаго объ опредѣленіи поверхности тѣлъ вращенія является случай, когда одна изъ частей поверхности, ограничивающей тѣло, представляетъ собой круговое (плоское) кольцо, радіусы окружности котораго, напр., r и r_1; въ этомъ случаѣ площадь кольца, какъ извѣстно, опредѣлится по формулѣ

$$\pi(r^2-r_1^2)$$

Выяснивъ составъ тѣла вращенія, слѣдуетъ написать общія формулы, выражающія поверхность (или объемъ) каждаго изъ тѣлъ, составляющихъ данное сложное тѣло, и на основаніи вышеуказанныхъ соображеній получить изъ этихъ формулъ общее выраженіе поверхности (или объема) тѣла вращенія.

Найдя эти общія выраженія, слѣдуетъ замѣнить въ нихъ неизвѣстные элементы данными и произвести соотвѣтствующія упрощенія. Для вычисленія искомыхъ элементовъ примѣняются, главнымъ образомъ, теорема о перпендикулярѣ, опущенномъ изъ вершины прямого угла на гипотенузу, теорема Пиѳагора, теорема о квадратѣ стороны, лежащей противъ остраго или тупого угла въ треугольникѣ, и нѣкоторыя теоремы о подобіи треугольниковъ.



Черт. 13.

Укажемъ примѣненіе вышесказаннаго къ рѣшенію задачъ.

1. *Прямоугольный треугольникъ, катеты котораго* a *и* b, *вращается около оси, параллельной катету* a, *и проходящей черезъ вершину противолежащаго остраго угла. Опредѣлить поверхность и объемъ тѣла вращенія.*

Пусть ACB — данный прямоугольный треугольникъ, въ которомъ $BC=a$ и $AC=b$. Такъ какъ ось вращенія, по условію задачи,

проходитъ черезъ вершину угла A, параллельно катету BC, то на чертежѣ она изобразится въ видѣ прямой MN.

Пользуясь приведенными выше указаніями относительно изображенія тѣлъ вращенія, выполняемъ чертежъ, изъ разсмотрѣнія котораго замѣчаемъ, что вращеніе катета CA образуетъ кругъ $CDC'E$, вращеніе катета BC образуетъ боковую поверхность цилиндра CB', а вращеніе гипотенузы BA образуетъ боковую поверхность конуса BAB'.

Такимъ образомъ поверхность тѣла вращенія составится изъ площади круга (радіуса CA), боковой поверхности цилиндра (съ образующей BC) и боковой поверхности конуса (съ образующей BA); поэтому

$S_{т.\ вр.}$ равно площ. кр. $CDC'E+S_{б\ цил.\ CB'}+S_{б\ кон.\ BAB'}$; такъ какъ площ. кр. $CDC'E$ равна $\pi.CA^2=\pi.b^2$, $S_{б\ цил.\ CB'}$ равна $2\pi.CA.BC==2\pi.b.a$ и $S_{б\ кон.\ BAB'}$ равна $\pi.BO.BA=\pi.CA.BA=\pi.b.\sqrt{a^2+b^2}$, то

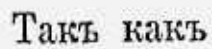
$$S_{т.\ вр.}=\pi b^2+2\pi ab+\pi b\sqrt{a^2+b^3}$$

или, окончательно,

$$S_{т.\ вр.}=\pi b(b+2a+\sqrt{a^2+b^2}).$$

Объемъ тѣла вращенія будетъ равенъ объему цилиндра CB' безъ объема конуса BAB', т.-е.

$W_{т.\ вр.}$ равенъ $V_{цил.\ CB'}-V_{кон.\ BAB'}$.



Черт. 14.

Такъ какъ

$V_{цил.\ CB'}$ равенъ $\pi CA^2BC=\pi b^2a$,

а $V_{кон.\ BAB'}$ равенъ $\frac{1}{3}\pi CA^2BC=$

$$=\frac{1}{3}\pi b^2a,$$

то $W_{т.\ вр.}=\pi ab^2-\frac{1}{3}\pi ab^2=\frac{2}{3}\pi ab^2$.

2. *Треугольникъ со сторонами* **a**, **b** *и* **c** *вращается около оси, проходящей внѣ его параллельно сторонѣ* **c** *и отстоящей отъ этой стороны на разстояніи* **m**. *Опредѣлить поверхность и объемъ тѣла вращенія.*

Положимъ, что ABC — данный треугольникъ и пусть ось вращенія MN, параллельная сторонѣ AB, занимаетъ относительно треугольника положеніе, указанное на чертежѣ *).

Изобразивъ тѣло вращенія и разсмотрѣвъ чертежъ, заключаемъ, что

$S_{т.\ вр.}$ равна $S_{б\ усѣч.\ кон.\ CBB'C'}+S_{б\ усѣч.\ кон.\ CC'A'A}+S_{б\ цил.\ AB'}$

Такъ какъ

$$S_{б\ усѣч.\ кон.\ CBB'C'}=\pi CB(BO+CO')=\pi.a\,[m+(CK+KO')]=$$
$$=\pi a(2m+CK)$$

$$S_{б\ усѣч.\ кон.\ CC'A'A}=\pi.CA.\ (CO'+AO_2)=\pi b(2m+CK)$$

$$S_{б\ цил.\ AB'}=2\pi.AO_2.BA=2\pi.m.c,$$

то

$$S_{т.\ вр.}=\pi a(2m+CK)+\pi.b(2m+CK)+2\pi mc.$$

Для опредѣленія неизвѣстнаго элемента CK, служащаго высотой треугольника ABC, слѣдуетъ воспользоваться равенствомъ $\Delta=\frac{c.CK}{2}$, откуда $CK=\frac{2\Delta}{c}$, при чемъ Δ опредѣлится по формулѣ

$$\frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}.$$

Такимъ образомъ имѣемъ

$$S_{т.\ вр.}=\pi a\left(2m+\frac{2\Delta}{c}\right)+\pi b\left(2m+\frac{2\Delta}{c}\right)+2\pi mc,$$

откуда, послѣ упрощеній, получимъ окончательно:

$$S_{т.\ вр.}=\frac{2\pi}{c}\Big[mc(a+b+c)+\Delta(a+b)\Big].$$

Для опредѣненія объема тѣла вращенія имѣемъ:

$W_{т.\ вр.}$ равенъ $V_{усѣч.\ кон.\ CBB'C'}+V_{усѣч.\ кон.\ CC'A'A}-V_{цил.\ AB'}$;

такъ какъ

$$V_{усѣч.\ кон.\ CBB'C'}=\frac{\pi.BK}{3}(BO^2+CO_1{}^2+BO.CO_1)=$$

---

*) Если m больше высоты треугольника, опущенной изъ вершины C на сторону AB, то задача допускаетъ два положенія оси вращенія по ту и другую сторону AB; если же m меньше этой высоты, то треугольникъ ABG будетъ обращенъ къ оси вращенія стороной AB.

$$=\frac{\pi\,.\,BK}{3}\left[m^2+\left(\frac{2\Delta}{c}+m\right)^2+m\,.\left(\frac{2\Delta}{c}+m\right)\right]=$$

$$=\frac{\pi BK}{3c^2}(3m^2c^2+4\Delta^2+6mc\Delta),$$

$$V_{усьч.\ кон.\ GAA'G'}=\frac{\pi AK}{3}(AO_2{}^2+CO_2{}^1+AO_2\,.\,CO_1)=$$

$$=\frac{\pi AK}{3c^2}(3m^2c^2+4\Delta^2+6mc\Delta)$$

и

$$V_{цил.\ AB'}=\pi AO_2{}^2\,.\,AB=\pi\,.\,m^2c,$$

то

$$W_{т.\ вр.}=\frac{\pi}{3c^2}(3m^2c^2+4\Delta^2+6mc\Delta)(BK+KA)+\pi m^2c=$$

$$=\frac{\pi}{3c}(3m^2c^2+4\Delta^2+6mc\Delta)+\pi m^2c=\frac{2\pi}{3c}(3m^2c^2+2\Delta^2+3mc\Delta)\,.$$

3. *Равнобедренная трапеція, основанія которой* a *и* c, *(при чемъ* $a>c$*), а боковая сторона* b, *вращается около оси, совпадающей съ большей изъ параллельныхъ сторонъ. Опредѣлить поверхность и объемъ тѣла вращенія.*

Выполнивъ чертежъ согласно условіямъ задачи и разсмотрѣвъ его, найдемъ, что

$$S_{т.\ вр.}\ \text{равна}\ S_{б\ цил.\ BC'}+S_{б\ кон.\ CDC'}+$$
$$+S_{б\ кон.\ BAB'}.$$

Замѣтивъ, что

$$S_{б\ цил.\ BC'}=2\pi\,.\,CO\,.\,BC=2\pi CO\,.\,c,$$
$$S_{б\ кон.\ CDC'}=S_{б.\ кон.\ BAB'}=\pi\,.\,CO\,.\,CD=$$
$$=\pi\,.\,CO\,.\,b,$$

найдемъ, что

$$S_{т.\ вр.}=2\pi CO\,.\,c+2\pi CO\,.\,b=2\pi\,.\,CO\,.\,(b+c).$$

Черт. 15.

Отрѣзокъ CO опредѣляемъ изъ прямоугольнаго треугольника COD по формулѣ

$$CO=\sqrt{CD^2-DO^2},\ \text{гдѣ}\ DO=\frac{AD-BC}{2}=\frac{a-c}{2},$$

слѣдовательно,

$$CO=\frac{1}{2}\sqrt{4b^2-(a-c)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{(2b+a-c)(2b-a+c)}.$$

Такимъ образомъ

$$S_{т.\ вр.}=2\pi\,.\,CO\,.\,(b+c)=\pi(b+c)\sqrt{(2b+a-c)(2b-a+c)}\,.$$

Объемъ тѣла вращенія будетъ равенъ объему цилиндра BC', сложенному съ двойнымъ объемомъ конуса CDC', т.-е.

$$W_{т.\ вр.}\ \text{равенъ}\ V_{цил.\ BC'}+2V_{кон.\ CDC'}.$$

Замѣтивъ, что

$$V_{цил.\ BC'}=\pi\,.\,CO^2\,.\,OD=\pi\,.\,\frac{(2b+a-c)(2b-a+c)(a-c)}{8},$$

$$V_{кон.\ CDC'}=\frac{\pi\,.\,CO^2DO}{3}=\frac{\pi\,.\,(2b+a-c)(2b-a+c)(a-c)}{24},$$

найдемъ:

$$W_{т.\ вр.}=\frac{5\pi}{24}(2b+a-c)(2b-a+c)(a-c).$$

Въ задачахъ №№ 773—777 разсмотрѣны тѣла вращенія, приводимыя къ *цилиндру*.

773. Квадратъ, діагональ котораго $d=6$ см., вращается около оси, совпадающей съ его стороной. Опредѣлить поверхность и объемъ тѣла вращенія.

774. Прямоугольникъ, стороны котораго $a=15$ дцм. и $b=9$ дцм. вращается около оси, совпадающей съ большей его стороной. Опредѣлить поверхность и объемъ тѣла вращенія.

775. Отъ вращенія прямоугольника около оси, совпадающей съ меньшей изъ его сторонъ, получается тѣло, объемъ котораго 75π кб. дюйм. Опредѣлить стороны этого прямоугольника, если ихъ отношеніе равно $3:5$.

776. Опредѣлить поверхность и объемъ тѣла, полученнаго отъ вращенія прямоугольника около одной изъ его сторонъ, если діагональ этого прямоугольника $d=10$ см., а периметръ $2p=28$ см.

777. Прямоугольникъ со сторонами $a=12$ см. и $b=18$ см. вращается около оси, параллельной меньшей его сторонѣ и отстоящей отъ нея на разстояніи $m=2$ см. Опредѣлить объемъ и поверхность тѣла вращенія.

Въ задачахъ №№ 778—783 разсмотрѣны тѣла вращенія, приводимыя къ *конусу*.

778. Прямоугольный треугольникъ, гипотенуза котораго $c=13$ фут., а площадь $\triangle=30$ кв. фут., вращается около оси, совпадающей съ большимъ катетомъ. Опредѣлить поверхность и объемъ тѣла вращенія.

779. Равносторонній треугольникъ вращается около оси, совпадающей съ одной изъ сторонъ, равной $a=2$ дюйм. Опредѣлить поверхность и объемъ тѣла вращенія.

780. Прямоугольный треугольникъ вращается около оси, совпадающей съ гипотенузой. Опредѣлить поверхность и объемъ тѣла вращенія, если катеты треугольника $a=8$ см. и $b=6$ см.

781. Треугольникъ, стороны котораго $a=60$ см., $b=45$ см. $c=21$ см., вращается около оси, совпадающей съ большей его стороной. Опредѣлить поверхность и объемъ тѣла вращенія.

782. Равнобедренный треугольникъ, основаніе котораго $b=8$ см., а высота $h_b=3$ см., вращается около оси, совпадающей съ одной изъ его боковыхъ сторонъ. Опредѣлить поверхность и объемъ тѣла вращенія.

783. Треугольникъ со сторонами $a=14$ дюйм., $b=10$ дюйм. и $c=5$ дюйм. вращается около оси, перпендикулярной къ меньшей изъ его сторонъ и проходящей черезъ противоположную ей вершину. Опредѣлить поверхность и объемъ тѣла вращенія.

Въ задачахъ №№ 784—790 разсмотрѣны тѣла вращенія, представляющія комбинаціи *цилиндра и конуса.*

784. Прямоугольный треугольникъ, катеты котораго $a=12$ фут. и $b=5$ фут., вращается около оси, параллельной меньшему катету и проходящей черезъ противоположную вершину. Опредѣлить поверхность и объемъ тѣла вращенія.

785. Прямоугольный треугольникъ, катеты котораго $a=3$ дцм. и $b=4$ дцм., вращается около оси, параллельной гипотенузѣ и проходящей черезъ вершину прямого угла. Опредѣлить поверхность и объемъ тѣла вращенія.

786. Треугольникъ, стороны котораго $a=9$ см., $b=5$ см. и $c=13$ см., вращается около оси, параллельной сторонѣ a и приходящей черезъ вершину противоположнаго угла. Опредѣлить поверхность и объемъ тѣла вращенія.

787. Параллелограммъ вращается около оси, совпадающей съ большей его стороной. Опредѣлить поверхность и объемъ тѣла вращенія, если стороны параллелограмма $a=12$ см. и $b=6$ см., а его высота $h_a=3$ см.

788. Правильный шестиугольникъ со стороной $a=3$ дюйм., вращается около оси, совпадающей съ діаметромъ окружности, описанной около шестиугольника. Опредѣлить поверхность и объемъ тѣла вращенія.

789. Трапеція со сторонами $a=30$ см., $b=20$ см., $c=9$ см. и $d=13$ см. вращается около оси, совпадающей съ большимъ ея основаніемъ. Опредѣлить поверхность и объемъ тѣла вращенія (a и c—основанія трапеціи).

790. Трапеція, въ которой боковыя стороны $b=13$ дцм. и $d=15$ дцм. большее изъ основаній $a=19$ дцм., а высота $h=12$ дцм., вращается около оси, совпадающей съ меньшимъ ея основаніемъ. Опредѣлить поверхность и объемъ тѣла вращенія.

Въ задачахъ №№ 791—796 разсмотрѣны тѣла вращенія, приводимыя къ *усѣченному конусу.*

791. Прямоугольная трапеція, въ которой параллельныя стороны $a=6$ фут. и $c=2$ фут., а высота $h=3$ фут., вращается около оси, совпадающей съ боковой стороной, образующей съ основаніями прямые углы. Опредѣлить поверхность и объемъ тѣла вращенія.

792. Равнобедренный треугольникъ вращается около оси, проходящей внѣ его перпендикулярно къ основанію и отстоящей отъ ближайшей вершины треугольника на разстояніи $n=2$ см. Опредѣлить поверхность и объемъ тѣла вращенія, если основаніе треугольника $b=12$ см., а высота $h_b=8$ см.

793. Прямоугольный треугольникъ вращается около оси, перпендикулярной къ его гипотенузѣ и находящейся отъ ближайшаго ея конца на разстояніи $n=3$ см. Опредѣлить поверхность и объемъ тѣла вращенія, если гипотенуза треугольника $c=15$ см., а одинъ изъ катетовъ $a=9$ см.

794. Правильный шестиугольникъ со стороной $a=6$ см. вращается около оси, проходящей черезъ средины двухъ его противоположныхъ сторонъ. Опредѣлить поверхность и объемъ тѣла вращенія.

795. Ромбъ, въ которомъ сторона и одна изъ діагоналей одинаковы и равны каждая $a=5$ см., вращается около оси, параллельной большей діагонали и находящейся отъ ближайшей вершины ромба на разстояніи $n=4$ см. Опредѣлить поверхность и объемъ тѣла вращенія.

796. Прямоугольникъ, отношеніе сторонъ котораго равно $1:2$, а діагональ равна $2\sqrt{5}$ дцм., вращается около оси, параллельной діагонали и находящейся отъ нея на разстояніи, равномъ длинѣ діагонали. Опредѣлить поверхность и объемъ тѣла вращенія.

Въ задачахъ №№ 797—801 разсмотрѣны тѣла вращенія, представляющія *комбинаціи цилиндра и усѣченнаго конуса.*

797. Прямоугольный треугольникъ съ катетами $a=12$ см. и $b=5$ см. вращается около оси, параллельной большему катету и отстоящей отъ него на разстояніи $m=20$ см. Опредѣлить поверхность и объемъ тѣла вращенія. (Возможны два положенія оси вращенія).

798. Прямоугольный треугольникъ, катеты котораго $a=3$ см. и $b=4$ см. вращается около оси, проходящей внѣ треугольника параллельно гипотенузѣ и отстоящей отъ него на разстояніи $m=6$ см. Опредѣлить поверхность и объемъ тѣла вращенія. (Возможны 2 положенія оси вращенія).

799. Ромбъ со стороной $a=5$ см. и одной изъ діагоналей $d=6$ см. вращается около оси, проходящей внѣ ромба параллельно его сторонѣ и отстоящей отъ нея на разстояніи $m=3$ см. Опредѣлить поверхность и объемъ тѣла вращенія.

800. Равнобедренная трапеція, въ которой параллельныя стороны $a=10$ см. и $c=4$ см., а боковая $b=5$ см., вращается около оси, проходящей внѣ трапеціи параллельно ея боковой сторонѣ и отстоящей отъ нея на разстояніи $m=2$ см. Опредѣлить поверхность и объемъ тѣла вращенія.

801. Правильный шестиугольникъ со стороной a вращается около оси, проходящей внѣ шестиугольника параллельно одной изъ его сторонъ и отстоящей отъ нея на разстояніи $\frac{a}{8}$. Опредѣлить поверхность и объемъ тѣла вращенія.

Въ задачахъ №№ 802—806 разсмотрѣны тѣла вращенія, представляющія *комбинаціи конуса и усѣченнаго конуса.*

802. Прямоугольникъ со сторонами $a=1{,}2$ дцм. и $b=1{,}6$ дцм. вращается около оси, проходящей черезъ его вершину параллельно діагонали. Опредѣлить поверхность и объемъ тѣла вращенія.

803. Периметръ ромба $2p=5{,}2$ метр., а меньшая діагональ $d_1=1$ метр. Опредѣлить поверхность и объемъ тѣла, полученнаго отъ вращенія этого ромба около оси, проходящей черезъ вершину тупого угла параллельно діагонали.

804. Опредѣлить поверхность и объемъ тѣла, полученнаго отъ вращенія равнобедренной трапеціи около оси, совпадающей съ боковой

стороной, если извѣстно, что одно изъ основаній $a=12$ см., боковая сторона $b=7$ см., а уголъ между этими сторонами 120°.

805. Правильный шестиугольникъ со стороной $a=\sqrt{3}$ см. вращается около оси, проходящей черезъ одну изъ его вершинъ перпендикулярно большей діагонали, выходящей изъ этой вершины. Опредѣлить поверхность и объемъ тѣла вращенія.

806. Правильный пятиугольникъ со стороной a вращается около оси, совпадающей съ одной изъ его сторонъ. Опредѣлить поверхность и объемъ тѣла вращенія.

Въ задачахъ №№ 807—810 разсмотрѣны тѣла вращенія, представляющія *комбинаціи цилиндра, конуса и усѣченнаго конуса.*

807. Правильный шестиугольникъ со стороной $a=1$ метр., вращается около оси, совпадающей съ одной изъ его сторонъ. Опредѣлить поверхность и объемъ тѣла вращенія.

808. Правильный десятиугольникъ вращается около оси, проходящей черезъ двѣ наиболѣе удаленныя другъ отъ друга его вершины. Опредѣлить поверхность и объемъ тѣла вращенія, если радіусъ описанной около десятиугольника окружности $R=6$ см.

809. Основанія равнобедренной трапеціи $a=25$ см. и $c=15$ см.; боковыя стороны наклонены къ большему основанію подъ углами въ 60°. Эта трапеція вращается около оси, лежащей внѣ ея и проходящей черезъ конецъ большей стороны параллельно неприлежащей боковой сторонѣ. Опредѣлить поверхность и объемъ тѣла вращенія.

810. На сторонахъ правильнаго треугольника внѣ его построены квадраты, вершины которыхъ соединены послѣдовательно между собою. Опредѣлить поверхность и объемъ тѣла, образованнаго вращеніемъ полученнаго многоугольника около оси, совпадающей съ одной изъ меньшихъ его сторонъ, если сторона треугольника $a=10$ дюйм.

Въ задачахъ №№ 811—816 поверхности и объемы тѣла вращенія входятъ въ число данныхъ элементовъ.

811. Поверхности тѣлъ, полученныхъ послѣдовательнымъ вращеніемъ треугольника около осей, совпадающихъ поочереди съ каждой изъ его сторонъ, относятся, какъ $27:40:14$. Опредѣлить меньшую изъ сторонъ этого треугольника, если двѣ другія равны 8 см. и 12 см.

812. Прямоугольный треугольникъ вращается около оси, совпадающей поочереди съ каждой изъ сторонъ; объемы тѣлъ, получаемыхъ отъ вращенія, относятся, какъ $m:n:p=12:15:20$.

Опредѣлить длину сторонъ этого треугольника, если извѣстно, что высота его, опущенная на гипотенузу, равна $h=12$ см.

813. Отъ вращенія прямоугольника около осей, совпадающихъ послѣдовательно съ каждой изъ двухъ его неравныхъ сторонъ, получились тѣла, объемы которыхъ $V=384\pi$ кб. дюйм. и $V_1=288$ кб. дюйм. Опредѣлить стороны прямоугольника, если ихъ отношеніе $m:n=3:4$.

814. Поверхность тѣла, происшедшаго отъ вращенія ромба около оси, совпадающей съ одной изъ его сторонъ, равна $S=128\pi$ кв. см. Опредѣлить площадь ромба.

815. Отъ вращенія ромба около оси, проходящей черезъ одну изъ его вершинъ параллельно діагонали $d=6$ см., получилось тѣло, объемъ котораго $V=192\pi$ кб. см. Опредѣлить другую діагональ ромба.

816. Объемъ тѣла, происшедшаго отъ вращенія трапеціи около оси, совпадающей съ ея меньшимъ основаніемъ, равенъ $V=3696$ кб. см. Опредѣлить длину этого основанія, если высота трапеціи $h=7$ см., а сумма основаній $m=43$ см.

Подобіе цилиндровъ и конусовъ.

Цилиндры (или конусы) называются подобными, если они произошли отъ вращенія подобныхъ прямоугольниковъ (или прямоугольныхъ треугольниковъ) около осей, совпадающихъ съ сходственными сторонами.

Боковыя и полныя поверхности подобныхъ цилиндровъ (или конусовъ) относятся между собою, какъ квадраты радіусовъ ихъ основаній, или какъ квадраты ихъ высотъ.

Объемы подобныхъ цилиндровъ (или конусовъ) относятся между собой, какъ кубы радіусовъ ихъ основаній, или какъ кубы ихъ высотъ.

817. Радіусъ основанія цилиндра $r=3$ дюйм., а его высота $H=8$ дюйм. Опредѣлить поверхность и объемъ цилиндра, подобнаго данному, въ которомъ радіусъ основанія $r_1=2$ дюйма.

818. Отношеніе радіусовъ основаній двухъ подобныхъ цилиндровъ $m:n=3:4$, а сумма ихъ поверхностей $M=50$ кв. дцм. Опредѣлить поверхность цилиндровъ.

819. Поверхность конуса $S=36$ кв. фут., а радіусъ основанія $r=3{,}5$ фут. Опредѣлить радіусъ основанія подобнаго данному конуса, въ которомъ $S_1=49$ кв. фут.

820. Радіусъ основанія конуса $r=4$ см., а его высота $H=6$ см. Опредѣлить объемъ конуса, подобнаго данному, съ высотой $H_1=9$ см.

821. Отношеніе высотъ двухъ подобныхъ конусовъ $m:n=1:2$, а сумма ихъ объемовъ $N=18$ кб. арш. Опредѣлить объемы конусовъ.

822. Цилиндръ и конусъ имѣютъ общее основаніе и одинаковую высоту. Въ конусъ вписанъ цилиндръ, подобный первому; объемъ вписаннаго цилиндра $V=20$ кб. дцм. Опредѣлить объемъ большаго цилиндра.

823. Радіусы основаній усѣченнаго конуса $r=4$ см. и $r_1=9$ см. Въ какомъ отношеніи раздѣлитъ высоту усѣченнаго конуса плоскость, проведенная параллельно основаніямъ и дѣлящая конусъ на двѣ подобныя между собой части.

Шаръ и его части.

Сѣченіе шара плоскостью. Плоскость, касательная къ шару.

При рѣшеніи задачъ этого отдѣла главнымъ образомъ примѣняется теорема: Сѣченіе шара плоскостью есть кругъ.

Обозначивъ радіусъ шара буквой R, радіусъ сѣченія — буквой r, а разстояніе плоскости сѣченія отъ центра шара буквой d, получимъ слѣдующую зависимость:

$$R^2=r^2+d^2.$$

Кромѣ вышеприведенной теоремы приходится пользоваться еще слѣдующими:

Плоскость, перпендикулярная къ радіусу шара и проходящая черезъ конецъ этого радіуса, лежащій на поверхности шара, есть касательная плоскость, и обратно.

Радіусъ шара, проведенный въ точку касанія плоскости и шара, перпендикуляренъ къ этой плоскости.

824. Въ шарѣ радіуса $R=13$ см. проведено сѣченіе, радіусъ котораго $r=5$ см. Опредѣлить разстояніе проведеннаго сѣченія отъ центра шара.

825. Шаръ радіуса $R=6{,}5$ дцм., пересѣченъ плоскостью такъ, что длина окружности полученнаго сѣченія $C=5\pi$ дцм. Опредѣлить разстояніе плоскости сѣченія отъ центра шара.

826. Шаръ пересѣченъ плоскостью, отстоящей отъ центра шара на разстояніи $m=4$ см. Длина окружности полученнаго сѣченія $C=6\pi$ см. Опредѣлить радіусъ шара.

827. Шаръ пересѣченъ плоскостью, отстоящей отъ центра шара на разстояніи $m=5$ дюйм. Площадь полученнаго сѣченія $k=24\pi$ кв. дюйм. Опредѣлить радіусъ шара.

828. Шаръ пересѣченъ плоскостью, удаленной отъ центра шара на $m=4$ фут. Площадь полученнаго сѣченія въ $n=2$ раза меньше площади большого круга. Опредѣлить радіусъ шара.

829. Шаръ пересѣченъ плоскостью, отстоящей отъ центра этого шара на разстояніи $a=8$ см. Опредѣлить радіусъ шара, если длина окружности полученнаго сѣченія составляетъ $\frac{m}{n}=\frac{3}{5}$ окружности большого круга шара.

830. Въ шарѣ, по одну сторону отъ его центра, проведены два параллельныхъ сѣченія, отстоящія другъ отъ друга на $a=2$ см. Опредѣлить радіусъ шара, если площади проведенныхъ сѣченій равны $P=64\pi$ кв. см. и $Q=36\pi$ кв. см.

831. Къ шару радіуса $R=8$ дцм. проведена касательная плоскость. Нѣкоторая точка A касательной плоскости отстоитъ отъ точки касанія на разстояніи $a=6$ дцм. Опредѣлить разстояніе точки A отъ центра шара.

832. Двѣ плоскости, касаясь шара, пересѣкаются подъ угломъ въ $120°$. Кратчайшее разстояніе между точками касанія, считая по поверхности шара, равно $a=7$ дцм. Опредѣлить радіусъ шара.

833. Двѣ плоскости касаются шара такъ, что разстояніе между точками касанія равно радіусу шара $R=3$ см. Опредѣлить разстояніе отъ центра шара до прямой пересѣченія плоскостей.

834. Черезъ три точки, находящіяся на поверхности шара радіуса R и отстоящія другъ отъ друга на разстояніи, равномъ радіусу шара, проведены касательно къ шару плоскости. Опредѣлить разстояніе вершины трегранныго угла, образованнаго пересѣченіемъ плоскостей, отъ центра шара.

Поверхность шара.

Для выраженія поверхности шара имѣемъ слѣдующую формулу:

$$S=4\pi R^2=\pi D^2, \text{ гдѣ } D \text{ — діаметръ шара.}$$

Кромѣ этого, слѣдуетъ имѣть въ виду, что поверхности шаровъ относятся между собою, какъ квадраты ихъ радіусовъ или діаметровъ.

835. Радіусъ шара $R=3$ см. Опредѣлить поверхность шара.

836. Поверхность шара $S=100\pi$ кв. фут. Опредѣлить радіусъ шара.

837. Длина окружности большого круга шара $C=8\pi$ см. Опредѣлить поверхность шара.

838. Площадь большого круга шара $K=60$ кв. дюйм. Опредѣлить поверхность шара.

839. Площадь большого круга шара меньше поверхности шара на 27π кв. фут. Опредѣлить радіусъ шара.

840. Какъ измѣнится поверхность шара, если его радіусъ *a*) увеличить въ $m=2$ раза, *b*) уменьшить въ $n=3$ раза?

841. Разность поверхностей двухъ шаровъ $S=73\pi$ кв. дцм., а сумма радіусовъ этихъ шаровъ $m=8$ дцм. Опредѣлить радіусы шаровъ.

842. Сумма радіусовъ двухъ шаровъ равна $p=6$ см., а поверхности этихъ шаровъ относятся между собой, какъ $m:n=1:4$. Опредѣлить радіусы этихъ шаровъ.

843. Опредѣлить радіусъ шара, поверхность котораго равна суммѣ поверхностей трехъ шаровъ, радіусы которыхъ $r=2$ см., $r_1=3$ см. и $r_2=6$ см.

844. Дуга окружности большого круга шара содержитъ $n°=144°$ и имѣетъ длину $l=16$ см. Опредѣлить поверхность шара.

Объемъ шара.

Объемъ шара выражается слѣдующей формулой:

$$V=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{\pi D^3}{6}.$$

Кромѣ того, слѣдуетъ имѣть въ виду, что объемы шаровъ относятся, какъ кубы ихъ радіусовъ или діаметровъ.

845. Опредѣлить объемъ шара, если *a*) его радіусъ $R=6$ см., *b*) его діаметръ $D=5$ фут.

846. Длина окружности большого круга шара $C=6\pi$ дцм. Опредѣлить объемъ шара.

847. Объемъ шара $V=288\pi$ кб. см. Опредѣлить поверхность шара.

848. Поверхность шара $S=25\pi$ кв. вершк. Опредѣлить объемъ шара.

849. Какъ измѣнится поверхность шара, если его объемъ *a*) увеличить въ $m=8$ разъ, *b*) уменьшить въ $n=27$ разъ.

850. Длина дуги окружности большого круга шара въ 44° равна 4 дцм. Опредѣлить объемъ шара.

851. Шаръ пересѣченъ плоскостью. Площадь сѣченія въ n разъ меньше поверхности шара. Опредѣлить объемъ этого шара, если разстояніе сѣкущей плоскости отъ его центра равно a.

852. Объемы двухъ шаровъ относятся, какъ $m:n=4:9$. Опредѣлить отношеніе поверхностей этихъ шаровъ.

853. Сумма объемовъ двухъ шаровъ равна 10291,8 кб. см., а отношеніе ихъ поверхностей равна 16 : 9. Опредѣлить радіусы каждаго изъ этихъ шаровъ.

854. Сумма объемовъ двухъ шаровъ $V=324\pi$ кб. см., а сумма ихъ радіусовъ $m=9$ см. Опредѣлить радіусы шаровъ.

855. Два шара касаются другъ друга внутренне, при чемъ разстояніе между ихъ центрами d, а поверхность большаго шара S. Опредѣлить объемъ пространства, заключеннаго между поверхностями этихъ шаровъ.

856. Два шара имѣютъ общій центръ. Плоскость, касающаяся поверхности меньшаго шара, даетъ въ сѣченіи съ поверхностью большаго окружность радіуса r. Опредѣлить объемъ пространства, заключеннаго между поверхностями этихъ шаровъ, если разность ихъ радіусовъ равна d.

Поверхность и объемъ сферическаго сегмента.

Обозначая радіусъ шара черезъ R, радіусъ основанія сферическаго сегмента, отсѣченнаго отъ этого шара, черезъ r, а высоту сегмента черезъ h, будемъ имѣть слѣдующія выраженія для поверхности и объема сегмента.

1) черезъ радіусъ шара и высоту сегмента

$$S=2\pi Rh \quad \text{и} \quad V=\frac{\pi h^2}{2}(3R-h)$$

и 2) черезъ радіусъ основанія сегмента и его высоту

$$S=\pi(r^2+h^2) \quad \text{и} \quad V=\frac{\pi r^2 h}{2}+\frac{\pi h^3}{6}=\frac{\pi h}{6}(3r^2+h^2).$$

Въ приведенныхъ формулахъ для опредѣленія поверхности сферическаго сегмента буквой S обозначена сферическая (кривая) поверхность. Въ нѣкоторыхъ задачахъ приходится встрѣчаться съ

вычисленіемъ *полной* поверхностью сегмента, подъ которой подразумѣвается сферическая поверхность, сложенная съ площадью основанія сегмента. Для опредѣленія полной поверхности служатъ формулы

$$S_n=\pi(2Rh+r^2) \quad \text{и} \quad S_n=\pi(2r^2+h^2).$$

При рѣшеніи задачъ на опредѣленіе поверхности и объема сегмента главнымъ образомъ примѣняется теорема Пиѳагора.

Поверхность сферическаго сегмента.

857. Радіусъ шара $R=6$ дм., а высота сферическаго сегмента $h=2,4$ дм. Опредѣлить сферическую поверхность сегмента.

858. Радіусъ основанія сферическаго сегмента $r=12$ см., а высота сегмента $h=7,5$ см. Опредѣлить сферическую поверхность сегмента.

859. Радіусъ шара $R=10$ см., а полная поверхность сферическаго сегмента $S=144\pi$ кв. см. Опредѣлить высоту сегмента.

860. Радіусъ шара $R=5$ см., а радіусъ основанія сегмента $r=3$ см. Опредѣлить сферическую поверхность сегмента.

861. Поверхность сферическаго сегмента, отсѣченнаго отъ шара радіуса $R=6$ фут., равна $S=7,2$ кв. фут. Опредѣлить площадь основанія сегмента.

862. Сферическая поверхность сегмента $S=100\pi$ кв. фут., а радіусъ основанія сегмента $r=8$ фут. Опредѣлить радіусъ шара, отъ котораго отсѣченъ этотъ сегментъ.

863. Полная поверхность сегмента $S=88\pi$ кв. дюйм., а высота сегмента $h=4$ дюйм. Опредѣлить радіусъ основанія сегмента.

864. Сферическая поверхность сегмента $S=19,6\pi$ кв. см., а радіусъ шара, отъ котораго отсѣченъ данный сегментъ, $R=7$ см. Опредѣлить радіусъ основанія сегмента.

865. Сферическая поверхность сегмента въ $n=1,5$ раза больше площади основанія сегмента. Опредѣлить высоту сегмента, если радіусъ шара, отъ котораго этотъ сегментъ отрѣзанъ, равенъ $R=6$ дм.

Объемъ сферическаго сегмента.

866. Радіусъ шара $R=5$ дм., а высота сферическаго сегмента $h=1$ дм. Опредѣлить объемъ этого сегмента.

867. Объемъ сферическаго сегмента $V=42\frac{2}{3}\pi$ кб. дцм., а высота сегмента $h=4$ дцм. Опредѣлить сферическую поверхность сегмента.

868. Радіусъ шара $R=10$ вершк., а полная поверхность сферическаго сегмента $S=144\pi$ кв. вершк. Опредѣлить объемъ сегмента.

869. Сферическая поверхность сегмента $S=100\pi$ кв. см., а радіусъ основанія сегмента $r=6$ см. Опредѣлить объемъ сегмента.

870. Радіусъ шара $R=10$ фут., а радіусъ основанія сферическаго сегмента $r=8$ фут. Опредѣлить объемъ сегмента.

871. Сферическая поверхность сегмента $S=80\pi$ кв. арш., а высота сегмента $h=6$ арш. Опредѣлить объемъ сегмента.

872. Радіусъ основанія сферическаго сегмента $r=12$ см., а высота сегмента $h=7{,}5$ см. Опредѣлить объемъ сегмента.

873. Поверхность шара $S=25\pi$ кв. см., а высота сегмента, отсѣченнаго отъ этого шара, $h=3$ см. Опредѣлить объемъ сегмента.

874. Шаръ, радіусъ котораго $R=18$ см., разсѣченъ плоскостью такъ, что высоты обоихъ шаровыхъ сегментовъ относятся, какъ $m:n=1:5$. Опредѣлить поверхность и объемъ каждаго изъ шаровыхъ сегментовъ.

875. Шаръ радіуса $R=3$ дюйм. разсѣченъ плоскостью на двѣ части такъ, что сферическія поверхности частей относятся, какъ $m:n=3:7$. Опредѣлить объемъ меньшаго изъ образовавшихся сегментовъ.

876. Сферическая поверхность сегмента $S=78{,}4\pi$ кв. дцм., а радіусъ шара, отъ котораго отсѣченъ этотъ сегментъ, $R=14$ дцм. Опредѣлить объемъ сегмента.

877. Объемъ сферическаго сегмента $V=144\pi$ кб. см. Сферическая поверхность сегмента вдвое больше площади его основанія. Опредѣлить поверхность шара, отъ котораго отсѣченъ данный сегментъ.

878. Опредѣлить поверхность и объемъ шарового сегмента, если извѣстно, что радіусъ шара равенъ R, а центральный уголъ сектора α равенъ a) $60°$, b) $90°$, c) $120°$.

Поверхность и объемъ сферическаго сектора.

Пользуясь предыдущими обозначеніями, для опредѣленія шаровой поверхности и объема сферическаго сектора, получимъ слѣдующія формулы:

$$S=2\pi Rh \quad \text{и} \quad V=\frac{2}{3}\pi R^2h.$$

Вслѣдствіе того, что опредѣленіе шаровой поверхности сферическаго сектора приводится къ опредѣленію шаровой поверхности сферическаго сегмента, въ задачахъ №№ 879—890 этотъ вопросъ разсматривается только въ связи съ опредѣленіемъ объема сферическаго сектора.

879. Опредѣлить полную поверхность (шаровую и коническую) сферическаго сектора даннаго шара, радіусъ котораго $R=10$ см., а высота сегмента, соотвѣтствующаго этому сектору, $h=6$ см.

880. Опредѣлить объемъ сферическаго сектора даннаго шара, радіусъ котораго $R=5$ дцм., а высота сегмента, соотвѣтствующаго этому сектору, $h=3$ дцм.

881. Опредѣлить объемъ сферическаго сектора даннаго шара радіуса $R=7$ см., если сферическая поверхность этого сектора $S=90\pi$ кв. см.

882. Объемъ сферическаго сектора $V=1000$ кб. см., а радіусъ шара $R=10$ см. Опредѣлить сферическую поверхность сектора и высоту соотвѣтствующаго ему сегмента.

883. Объемъ сферическаго сектора $V=36\pi$ кб. дцм., а его сферическая поверхность $S=18\pi$ кв. дцм. Опредѣлить высоту сегмента соотвѣтствующаго данному сектору.

884. Опредѣлить объемъ сферическаго сектора, если радіусъ основанія соотвѣтствующаго ему сегмента $r=15$ дм., а высота сегмента $h=9$ дм.

885. Опредѣлить объемъ и шаровую поверхность сферическаго сектора шара радіуса $R=5$ вершк., если радіусъ основанія соотвѣтствующаго сегмента $r=3$ вершк.

886. Сферическая поверхность шарового сектора $S=261$ кв. дм., а радіусъ основанія соотвѣтствующаго сегмента $r=15$ дм. Опредѣлить объемъ сектора.

887. Объемъ сферическаго сектора $V=34\frac{13}{18}\pi$ кб. фут., а высота соотвѣтствующаго сектору сегмента $h=3$ фут. Опредѣлить радіусъ основанія сегмента.

888. Опредѣлить объемъ сферическаго сектора, если уголъ его осевого сѣченія $60°$, а радіусъ шара, соотвѣтствующаго сектору, R.

889. Объемъ шарового сектора относится къ объему шара, какъ $m:n=4:29$; радіусъ шара равенъ $R=87$ см. Опредѣлить отношеніе поверхностей этихъ тѣлъ.

890. Изъ каждаго шара, радіусы которыхъ относятся, какъ 10:7, вырѣзаны шаровые секторы такъ, что оба соотвѣтствующіе имъ сферическіе сегменты имѣютъ одинаковую высоту. Опредѣлить объемъ сферическаго сектора, вырѣзаннаго изъ перваго шара, если объемъ сферическаго сектора, вырѣзаннаго изъ второго шара, равенъ 147 кб. см.

Поверхность шарового пояса (зоны) и объемъ шарового слоя.

Поверхность шарового пояса.

Часть шара, заключенная между двумя параллельными плоскостями, называется шаровымъ слоемъ, круги параллельныхъ сѣченій шара — основаніями слоя, а разстояніе между этими кругами — высотой слоя.

Сферическая поверхность шарового слоя называется шаровымъ поясомъ или зоной.

Въ нижеприводимыхъ задачахъ тамъ, гдѣ не сдѣлано на это особаго указанія, предполагается, что основанія слоя лежатъ по одну сторону отъ центра шара.

Обозначая радіусъ шара черезъ R, а высоту пояса этого шара черезъ h, получимъ слѣдующее выраженіе для поверхности шарового пояса (зоны):

$$S=2\pi Rh.$$

891. Сферическій слой, высота котораго h, принадлежитъ шару радіуса R. Въ какой зависимости отъ радіусовъ основаній слоя находится сферическая поверхность слоя (поверхность пояса),

892. Шаръ радіуса $R=10$ дм. пересѣченъ двумя параллельными плоскостями. Поверхность образовавшагося шарового пояса $S=60$ кв. дм. Опредѣлить высоту этого пояса.

893. Поверхность шарового пояса $S=120$ кв. дцм., а высота его $h=5$ дцм. Опредѣлить радіусъ шара.

894. Поверхность шарового пояса равна площади большого круга шара радіуса R, къ которому принадлежитъ этотъ поясъ. Опредѣлить высоту пояса.

895. Радіусъ шара $R=13$ см., радіусъ большого основанія слоя $r=12$ см., а разстояніе меньшаго основанія слоя отъ центра шара $m=12$ см. Опредѣлить поверхность пояса, соотвѣтствующаго слою.

896. Радіусы основаній сферическаго слоя $r=8$ см. и $r_1=6$ см., а высота слоя $h=2$ см. Опредѣлить поверхность соотвѣтствующаго слою пояса.

897. Радіусъ шара $R=5$ фут., а радіусы основаній слоя этого шара $r=4$ фут. и $r_1=3$ фут. Опредѣлить поверхность пояса, соотвѣтствующаго этому слою.

898. Радіусъ шара $R=13$ см.; радіусъ одного изъ основаній слоя $r=12$ см., а поверхность пояса, соотвѣтствующаго этому слою, $S=182\pi$ кв. см. Опредѣлить радіусъ другого основанія слоя.

899. Полная поверхность сферическаго слоя $S_n=85\pi$ кв. дцм., поверхность соотвѣтствующаго слою пояса $S=60\pi$ кв. дцм., а радіусъ одного изъ основаній слоя $r=4$ дцм. Опредѣлить радіусъ другого основанія слоя.

900. Полная поверхность сферическаго слоя $S_n=89{,}6\pi$ кв. дюйм., поверхность соотвѣтствующаго слою пояса $S=25{,}6\pi$ кв. дюйм., а радіусъ соотвѣтствующаго шара $R=8$ дюйм. Опредѣлить радіусы основаній слоя.

901. Высота сферическаго слоя $h=4$ см., его полная поверхность $S=560\pi$ кв. см., а радіусъ шара, соотвѣтствующаго слою, $R=20$ см. Опредѣлить радіусы основаній слоя.

902. Радіусы основаній сферическаго слоя $r=5$ см. и $r_1=3$ см.; разстоянія основаній слоя отъ центра соотвѣтствующаго шара относятся между собой, какъ $m:n=3:2$. Опредѣлить поверхность пояса, соотвѣтствующаго данному слою.

Объемъ сферическаго слоя.

Обозначая радіусы основаній слоя черезъ r и r_1, а высоту черезъ h, получимъ слѣдующее выраженіе объема шарового слоя:

$$V=\frac{\pi h}{2}\left(r^2+r_1{}^2\right)+\frac{\pi h^3}{6}.$$

903. Радіусы основаній сферическаго слоя $r=8$ дцм. и $r_1=5$ дцм. а высота слоя $h=3$ дцм. Опредѣлить объемъ слоя.

904. Радіусъ шара $R=10$ дцм., а радіусы основаній слоя этого шара $r=8$ дцм. и $r_1=6$ дцм. Опредѣлить объемъ слоя.

905. Опредѣлить объемъ слоя, радіусы основаній котораго $r=12$ дюйм. и $r_1=5$ дюйм., а поверхность пояса, соотвѣтствующаго этому слою, $S=182\pi$ кв. дюйм.

906. Шаръ радіуса $R=5$ см. пересѣченъ двумя параллельными плоскостями, отстоящими другъ отъ друга на разстояніи $h=3$ см., такъ, что одна изъ плоскостей проходитъ черезъ центръ шара. Опредѣлить объемъ части шара, заключенной между плоскостями.

907. Радіусъ шара $R=10$ дцм., высота слоя $h=2$ дцм., а радіусъ меньшаго основанія слоя $r=6$ дцм. Опредѣлить радіусъ большаго основанія и объемъ слоя.

908. Площади основаній сферическаго слоя относятся, какъ $m:n=3:2$, высота слоя $h=1$ дюйм., а радіусъ соотвѣтствующаго слою шара $R=4$ дюйм. Опредѣлить объемъ слоя.

909. Объемъ сферическаго слоя $V=342\pi$ кб. вершк., высота слоя $h=3$ вершк., а радіусъ соотвѣтствующаго шара $R=15$ вершк. Опредѣлить поверхность пояса, соотвѣтствующаго этому слою.

910. Объемъ сферическаго слоя $V=202\frac{2}{3}\pi$ кб. дцм., поверхность соотвѣтствующаго слою пояса $S=40\pi$ кв. дцм., а радіусъ шара, соотвѣтствующаго слою, $R=10$ дцм. Опредѣлить высоту слоя.

911. Радіусъ шара $R=6{,}5$ см., радіусъ большого основанія слоя $r=6$ см., а полная поверхность слоя $S=87{,}75\pi$ кв. см. Опредѣлить объемъ слоя.

912. Радіусъ шара $R=6{,}5$ дцм., радіусъ меньшаго основанія слоя $r_1=2{,}5$ дцм., а разстояніе большого основанія слоя отъ центра шара равно радіусу меньшаго основанія. Опредѣлить объемъ слоя.

Тѣла вращенія, приводимыя къ шару и его частямъ.

Кромѣ ранѣе указанныхъ соотношеній и формулъ, относящихся къ опредѣленію поверхности и объема шара и его частей, при рѣшеніи задачъ этого отдѣла необходимо имѣть въ виду слѣдующее:

1. Ось вращенія лежитъ въ плоскости вращающейся фигуры.

2. Объемъ тѣла, образованнаго вращеніемъ кругового сегмента около оси, совпадающей съ діаметромъ круга и не пересѣкающей сегмента, выражается формулой:

$$W=\frac{1}{2}\pi l^2 h,$$

гдѣ l — хорда сегмента, а h — проекція этой хорды на ось вращенія.

3. Если окружность круга вращается около оси, не пересѣкающей эту окружность, то

a) поверхность полученнаго тѣла вращенія выражается формулой:

$$S=4\pi^2 rd,$$

гдѣ r — радіусъ окружности, а d — разстояніе ея центра отъ оси вращенія и

b) объемъ полученнаго тѣла вращенія — формулой:

$$W=2\pi^2 r^2 d.$$

Замѣчаніе: Полученное тѣло вращенія носитъ названіе *тора*.

Если полукругъ вращается около оси, лежащей внѣ его и параллельной его діаметру, то, въ зависимости отъ положенія оси вращенія, будемъ имѣть:

a) въ случаѣ, если полуокружность обращена своей выпуклостью въ сторону, противоположную оси вращенія

$$S=2\pi r(\pi d+2r) \quad \text{и} \quad W=\frac{\pi r^2}{3}(3\pi d+4r),$$

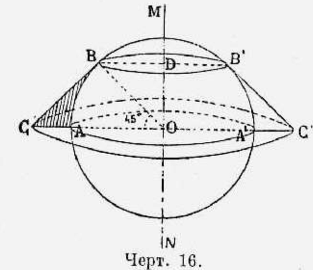
гдѣ r — радіусъ полукруга, а d — разстояніе центра полукруга отъ оси вращенія;

b) въ случаѣ, если полуокружность обращена своей выпуклостью въ сторону оси вращенія

$$S=4\pi r(\pi d-2r) \quad \text{и} \quad W=\frac{\pi r^2}{3}(3\pi d-4r).$$

Рѣшимъ слѣдующую задачу.

На окружности радіуса **R** *взяты точки* A *и* B *такъ, что дуга* AB *равна* **45°**. *Черезъ точку* B *проведена касательная къ окружности, а черезъ точку* A *проведенъ діаметръ, пересѣкающій своимъ продолженіемъ эту касательную въ точкѣ* C. *Опредѣлить поверхность и объемъ тѣла, полученнаго отъ вращенія фигуры* ACB *около оси, совпадающей съ діаметромъ окружности, перпендикулярнымъ къ прямой* OC.



Черт. 16.

Выполнивъ чертежъ согласно условіямъ задачи и разсмотрѣвъ его, заключаемъ, что

$S_{т.\ вр.}$ равна $S_{б.\ усѣч.\ кон.\ CBB'C'}+S_{шаров.\ пояса\ ABB'A'}+$площадь кругового кольца.

Замѣтивъ, что

$$S_{б.\ усѣч.\ кон.\ CBB'C'}=\pi(CO+BD)BC,$$
$$S_{шаров.\ пояса\ ABB'A'}=2\pi.BO.DO$$

и площадь кругового кольца $=\pi(CO^2-AO^2)$, получимъ, что

$$S_{т.\ вр.}=\pi(CO+BD).BC+2\pi BO.DO+\pi(CO^2-AO^2).$$

Изъ разсмотрѣнія равнобедреннаго прямоугольнаго треугольника CBO имѣемъ: $BC=BO=R$ и $CO=BO\sqrt{2}=R\sqrt{2}$, а изъ разсмотрѣнія равнобедреннаго прямоугольнаго треугольника BDO имѣемъ:

$$BD=DO=\frac{R\sqrt{2}}{2}.$$

Подставивъ найденныя значенія въ общее выраженіе поверхности тѣла вращенія, получимъ:

$$S_{т.\ вр.}=R\left(\sqrt{2}+\frac{R\sqrt{2}}{2}\right)R+2\pi R.\frac{R\sqrt{2}}{2}+\pi(2R^2-R^2),$$

откуда, послѣ соотвѣтствующихъ упрощеній, будемъ имѣть окончательно:

$$S_{т.\ вр.}=\frac{\pi R^2}{2}(5\sqrt{2}+2).$$

Для опредѣленія объема тѣла вращенія имѣемъ:

$$W_{т.\ вр.}\ \text{равно}\ V_{усѣч.\ кон.\ CBB'C'}-V_{шаров.\ слоя\ ABB'A'}.$$

Замѣтивъ, что

$$V_{усѣч.\ кон.\ CBB'C'}=\frac{\pi DO}{3}(CO^2+BD^2+CO.BD).$$

а

$$V_{шаров.\ слоя\ ABB'A'}=\frac{\pi.DO}{2}(AO^2+BD^2)+\frac{\pi.DO^3}{6},$$

найдемъ, что

$$W_{т.\ вр.}=\frac{\pi DO}{3}(CO^2+BD^2+CO.BD)-\frac{\pi DO}{2}(AO^2+BD^2)+\frac{\pi DO^3}{6}.$$

Подставивъ найденныя ранѣе значенія для неизвѣстныхъ въ общее выраженіе объема тѣла вращенія, получимъ:

$$W_{т.\ вр.}=\frac{\pi.R\sqrt{2}}{6}\left(2R^2+\frac{R^2}{2}+R^2\right)-\frac{\pi R\sqrt{2}}{4}\left(R^2+\frac{R^2}{2}\right)+\frac{\pi.R^3\sqrt{2}}{24},$$

откуда, послѣ соотвѣтствующихъ упрощеній, будемъ имѣть окончательно:

$$W_{т.\ вр.}=\frac{7}{12}\pi R^3\sqrt{2}-\frac{5}{12}\pi R^3\sqrt{2}=\frac{1}{6}\pi R^2\sqrt{2}.$$

913. Отрѣзокъ AB прямой служитъ діаметромъ полуокружности радіуса r. Центръ полуокружности — точка O. Отрѣзки AO и BO служатъ діаметрами новыхъ полуокружностей. Опредѣлить объемъ тѣла, полученнаго отъ вращенія части плоскости, заключающейся между проведенными полуокружностями, около оси, совпадающей съ отрѣзкомъ AB.

914. Отрѣзокъ AB прямой, равный $a=4$ дцм., служитъ діаметромъ полуокружности. Изъ конца A діаметра проведена хорда, образующая съ этимъ діаметромъ уголъ въ 30° и отсѣкающая отъ полуокружности нѣкоторый сегментъ. Опредѣлить объемъ тѣла, образованнаго вращеніемъ этого сегмента около оси, совпадающей съ діаметромъ AB полуокружности.

915. Между сторонами прямого угла, изъ его вершины, описана дуга радіусомъ $r=3$ см. Точки пересѣченія этой дуги со сторонами угла соединены между собой. Опредѣлить поверхность и объемъ тѣла, полученнаго отъ вращенія образовавшагося сегмента около оси, совпадающей съ одной изъ сторонъ прямого угла.

916. Въ прямоугольномъ секторѣ AOB, отъ конца A его дуги радіуса r, отложена дуга AC въ 60°, послѣ чего изъ конца C этой дуги опущенъ перпендикуляръ CD на радіусъ AO. Опредѣлить боковую поверхность и объемъ тѣла, полученнаго отъ вращенія дуги AC около оси, совпадающей съ прямой CD.

917. Діаметръ полукруга — AB. На полуокружности этого полукруга взяты двѣ точки M и N такъ, что длина хорды $MN=2$ см., а проекція этой хорды на діаметръ AB равна 1,8 см. Круговой сегментъ, соотвѣтствующій хордѣ MN, вращается около оси, совпадающей съ діаметромъ AB. Опредѣлить объемъ полученнаго тѣла вращенія.

918. Хорда, длина которой $a=5$ см., стягиваетъ дугу въ 45°. Опредѣлить поверхность тѣла, полученнаго отъ вращенія хорды около оси, совпадающей съ радіусомъ, проведеннымъ черезъ конецъ хорды.

919. Къ двумъ внѣшне касающимся окружностямъ, радіусы которыхъ R и r, проведена внѣшняя касательная. Опредѣлить объемъ тѣла, происшедшаго отъ вращенія площади, заключенной между окружностями круговъ и касательной, около оси, совпадающей съ линіей центровъ.

920. На окружности радіуса r взяты точки A и B такъ, что дуга $AB=45°$. Изъ точки A проведена касательная къ окружности, а черезъ точку B и центръ окружности проведена прямая, пересѣкающая касательную въ точкѣ C. Опредѣлить поверхность и объемъ тѣла, происшедшаго отъ вращенія фигуры ACB около оси, совпадающей съ прямой BC.

921a. Опредѣлить поверхность и объемъ тѣла, полученнаго отъ вращенія круга радіуса r, около оси, лежащей въ плоскости этого круга и касающейся его окружности.

921b. Опредѣлить поверхность и объемъ тѣла, полученнаго отъ вращенія круга, радіуса r, около оси, лежащей въ плоскости этого круга и отстоящей отъ его центра на разстояніи d (ось не пересѣкаетъ окружности круга).

922. Опредѣлить поверхность и объемъ кольца, полученнаго отъ вращенія полуокружности радіуса $r=3$ дюйм., около оси, параллельной діаметру, проходящему черезъ концы полуокружности, и отстоящей отъ этого діаметра на разстояніи $d=5$ дюйм. (2 случая).

923. Данъ квадратъ со стороной a. Изъ вершинъ квадрата, какъ изъ центровъ, описаны между его сторонами дуги радіусами, равными четверти стороны квадрата. Образовавшіеся прямоугольные секторы вырѣзаны, а оставшаяся фигура вращается около оси, проходящей черезъ средины противоположныхъ сторонъ квадрата. Опредѣлить поверхность и объемъ полученнаго тѣла вращенія.

924. Данъ квадратъ $ABCD$ со стороной a. Средина стороны AB — точка E, средина стороны BC — точка F, средина стороны BD — точка G, а средина стороны AD — точка H. Средины противоположныхъ сторонъ квадрата соединены другъ съ другомъ прямыми, пересѣкающимися въ точкѣ O. Изъ точки F, какъ изъ центра, радіусомъ BF, проведена дуга между сторонами BF и OF угла BFO, а изъ точки H, какъ изъ центра, радіусомъ HD проведена дуга между сторонами OH и HD угла DHO. Часть плоскости, ограниченная сторонами BC и CD квадрата и кривой BOD, вращается около оси, совпадающей со стороной CD. Опредѣлить поверхность и объемъ тѣла вращенія.

925. Опредѣлить поверхность и объемъ тѣла, образованнаго вращеніемъ фигуры, полученной въ предыдущей задачѣ, около оси, совпадающей со стороной BC квадрата.

926. Данъ квадратъ со стороной a. Одна изъ сторонъ этого квадрата раздѣлена пополамъ; полученные отрѣзки служатъ діаметрами двухъ полуокружностей, изъ которыхъ одна расположена внѣ квадрата, а другая внутри его. Часть плоскости, ограниченная полученной кривой линіей и тремя сторонами квадрата, вращается около оси, совпадающей со стороной квадрата, параллельной діаметрамъ построенныхъ полуокружностей. Опредѣлить боковую поверхность и объемъ тѣла вращенія.

927. Къ окружности круга радіуса $r=5$ см. проведена касательная и параллельно ей діаметръ; изъ точки касанія, какъ изъ центра, проведена дуга, проходящая черезъ концы діаметра. Часть плоскости, заключающаяся между дугой полуокружности и проведенной дугой (меньшая полукруга) вращается около оси, совпадающей съ касательной. Опредѣлить объемъ полученнаго тѣла вращенія.

Комбинаціи шара и другихъ геометрическихъ тѣлъ.

Призма, вписанная въ шаръ, или описанная около шара.

Въ задачахъ №№ 928—936 разсмотрѣны прямыя призмы, вписанныя въ шаръ и описанныя около шара.

Призма называется вписанной въ шаръ, если вершины всѣхъ ея трегранныхъ угловъ совпадаютъ съ поверхностью шара.

Призма называется описанной около шара, если плоскость каждой грани призмы касается шара.

При рѣшеніи задачъ этого отдѣла слѣдуетъ имѣть въ виду:

1. Если около многоугольника основанія прямой призмы можно описать окружность, то около такой призмы можно описать шаръ;

2. Если въ многоугольникъ основанія прямой призмы можно вписать окружность и если діаметръ этой окружности равенъ высотѣ призмы, то въ такую призму можно вписать шаръ.

Замѣчаніе. Какова бы ни была наклонная призма, около нея нельзя описать шаръ. Если въ многоугольникъ перпендикулярнаго сѣченія наклонной призмы можно вписать окружность и если діаметръ этой окружности равенъ высотѣ призмы, то въ такую призму можно вписать шаръ.

928. Въ шаръ вписанъ кубъ, поверхность котораго равна 600 кв. см. Опредѣлить діаметръ этого шара и отношеніе поверхностей обоихъ тѣлъ.

929. На нижнемъ основанiи куба, ребро котораго a, лежатъ четыре равныхъ шара; каждый изъ нихъ касается трехъ граней куба и двухъ другихъ шаровъ. Опредѣлить радiусъ шара, касающагося четырехъ данныхъ шаровъ и верхняго основанiя куба.

930. Около прямоугольнаго параллелепипеда, измѣренiя котораго a, b и c, описанъ шаръ. Опредѣлить объемъ шара.

931. Въ шаръ вписанъ прямоугольный параллелепипедъ, объемъ котораго V. Опредѣлить поверхность шара, если площади граней параллелепипеда относятся между собою, какъ $m : n : p$.

932. Ребро основанiя правильной треугольной призмы равно a, а площадь боковой грани равна площади основанiя призмы. Опредѣлить поверхность шара, описаннаго около этой призмы.

933. Около шара радiуса r описана правильная шестиугольная призма. Опредѣлить ея поверхность и объемъ.

934. Около шара описана правильная трегранная призма, а около этой призмы описанъ шаръ. Радiусъ большаго шара R. Опредѣлить радiусъ меньшаго шара.

935. На одномъ изъ основанiй правильной треугольной призмы лежатъ три шара, радiусы которыхъ одинаковы и равны r. Каждый изъ шаровъ касается двухъ боковыхъ граней призмы и двухъ другихъ шаровъ. Опредѣлить объемъ призмы, если другое ея основанiе касается этихъ шаровъ.

936. Основанiемъ прямой призмы служитъ правильный шестиугольникъ. Внутри призмы расположены семь равныхъ шаровъ: три изъ нихъ касаются нижняго основанiя, попарно соприкасаются между собой и, кромѣ того, каждый изъ нихъ касается двухъ боковыхъ граней призмы; три другiе шара расположены такимъ же образомъ относительно верхняго основанiя, а седьмой шаръ лежитъ въ срединѣ, касаясь остальныхъ шести шаровъ. Опредѣлить радiусъ одного изъ этихъ шаровъ, если объемъ призмы V.

Пирамида, вписанная въ шаръ и описанная около шара.

Въ задачахъ №№ 937—943 разсмотрѣны правильныя пирамиды, вписанныя въ шаръ, или описанныя около шара.

Пирамида называется вписанной въ шаръ, если ея вершина и вершины угловъ многоугольника основанiя совпадаютъ съ поверхностью шара.

Пирамида называется описанной около шара, если плоскость ея основанiя и плоскости боковыхъ граней касаются шара.

Около всякой правильной пирамиды можно описать шаръ и во всякую правильную пирамиду можно вписать шаръ.

937. Въ правильную треугольную пирамиду, сторона основанiя которой a, а апоѳема боковой грани h, описанъ шаръ. Опредѣлить разстоянiе отъ точки касанiя шаромъ боковой грани пирамиды до высоты этой пирамиды.

938. Въ правильную четыреугольную пирамиду вписанъ шаръ, центръ котораго дѣлитъ высоту пирамиды на части m и n $(m > n)$. Опредѣлить объемъ пирамиды.

939. Около шара, радiусъ котораго 4 см., описана правильная четыреугольная пирамида. Опредѣлить объемъ пирамиды, если отношенiе площадей основанiй пирамиды равно 1 : 3.

940. Въ шаръ радiуса R вписана правильная шестиугольная пирамида, высота которой равна $\frac{3}{2}R$. Опредѣлить объемъ этой пирамиды.

941. Сторона основанiя правильной шестиугольной пирамиды a, а высота ея $a\sqrt{2}$. Опредѣлить радiусъ шара, описаннаго около этой пирамиды.

942. Въ шаръ радiуса R вписана правильная четыреугольная пирамида, основанiе которой дѣлитъ перпендикулярный къ нему радiусъ шара пополамъ. Опредѣлить объемъ шара, вписаннаго въ эту пирамиду.

943. Точка пересѣченiя дiагоналей куба, ребро котораго a, служитъ общей вершиной пирамидъ, имѣющихъ основанiями грани куба. Въ каждую изъ этихъ пирамидъ вписанъ шаръ, касающiйся всѣхъ граней пирамиды. Опредѣлить поверхность шара, проходящую черезъ центры вписанныхъ въ пирамиды шаровъ.

Цилиндръ, вписанный въ шаръ и описанный около шара.

Цилиндръ называется вписаннымъ въ шаръ, если окружности его основанiй находятся на поверхности шара.

Цилиндръ называется описаннымъ около шара, если каждая изъ его образующихъ и плоскости его основанiй касаются шара.

Около всякаго прямого цилиндра можно описать шаръ.

Во всякій цилиндръ, осевое сѣченіе котораго есть квадратъ, можно вписать шаръ.

944. Периметръ осевого сѣченія цилиндра $2p$, а діагональ сѣченія d. Основанія цилиндра служатъ основаніями полушаровъ. Опредѣлить поверхность образовавшагося тѣла.

945. Площадь основанія цилиндра равна площади большого круга шара, поверхность котораго относится къ поверхности цилиндра, какъ $m : n = 2 : 3$. Опредѣлить отношеніе объемовъ этихъ тѣлъ.

946. Около шара радіуса r описанъ цилиндръ. Опредѣлить поверхность и объемъ цилиндра.

947. Шаръ, объемъ котораго V, вписанъ въ цилиндръ. Опредѣлить объемъ цилиндра.

948. Въ шаръ радіуса R вписанъ цилиндръ, объемъ котораго въ m разъ больше объема окружающаго этотъ цилиндръ шарового кольца. Опредѣлить высоту цилиндра.

949. Въ шаръ радіуса R вписанъ цилиндръ, высота котораго вдвое больше діаметра его основанія. Опредѣлить радіусъ шара, поверхность котораго равна боковой поверхности цилиндра.

950. Два равныхъ шара радіуса R вложены въ цилиндръ такъ, что одинъ изъ шаровъ касается нижняго основанія цилиндра и его боковой поверхности, а другой — касается поверхности перваго шара и боковой поверхности цилиндра. Опредѣлить поверхность и объемъ круглаго кольца (тора), расположеннаго между шарами и касающагося, какъ данныхъ шаровъ, такъ и боковой поверхности цилиндра.

Конусъ, вписанный въ шаръ и описанный около шара.

Конусъ называется вписаннымъ въ шаръ, если его вершина и окружность его основанія находятся на поверхности шара.

Конусъ называется описаннымъ около шара, если каждая изъ его образующихъ и плоскость его основанія касаются шара. Около всякаго прямого конуса можно описать шаръ и во всякій прямой конусъ можно вписать шаръ.

Усѣченный конусъ называется вписаннымъ въ шаръ, если окружности его основанія находятся на поверхности шара.

Усѣченный конусъ называется описаннымъ около шара, если каждая изъ его образующихъ и плоскости его основаній касаются шара.

Около всякаго усѣченнаго конуса можно описать шаръ.

Если въ осевое сѣченіе усѣченнаго конуса можно вписать окружность, то въ этотъ конусъ можно вписать шаръ.

951. Опредѣлить отношеніе поверхностей и объемовъ конуса, осевое сѣченіе котораго есть равносторонній треугольникъ, и описаннаго около него шара.

952. Опредѣлить отношеніе объемовъ конуса, осевое сѣченіе котораго представляетъ собою прямоугольный треугольникъ, и вписаннаго въ этотъ конусъ шара.

953. Опредѣлить объемы и поверхности шаровъ, описаннаго около конуса и вписаннаго въ конусъ, радіусъ основанія и высота котораго соотвѣтственно равны $r=15$ см. и $h=36$ см.

954. Поверхность конуса, описаннаго около шара радіуса R, въ m разъ больше поверхности шара. Опредѣлить высоту конуса.

955. Въ шаръ вписаны два конуса, имѣющіе общую вершину. Опредѣлить поверхность части шара, заключенную между основаніями конусовъ, если образующія ихъ l и l'.

956. Около шара радіуса R описанъ конусъ, вершина котораго находится отъ центра шара на разстояніи a. Опредѣлить радіусъ окружности, по которой конусъ касается шара.

957. Радіусъ основанія конуса r, а отношеніе высоты конуса къ діаметру его основанія равно $3 : 2$. Основаніе конуса служитъ основаніемъ полушара, пересѣкающаго боковую поверхность конуса по нѣкоторой окружности. Опредѣлить радіусъ этой окружности.

958. Радіусъ основанія конуса $r=2$ см., а высота его $H=6$ см.; средина высоты конуса служитъ центромъ шара, касающагося основанія конуса. Опредѣлить объемъ, общій обоимъ тѣламъ.

959. Въ шаръ радіуса R вписанъ конусъ, высота котораго равна радіусу его основанія. Опредѣлить объемъ шара, вписаннаго въ этотъ конусъ.

960. Площади основаній усѣченнаго конуса относятся, какъ $1 : 2$. Въ этотъ конусъ вписанъ шаръ радіуса r. Опредѣлить объемъ усѣченнаго конуса.

961. Около шара описанъ усѣченный конусъ, радіусы основаній котораго r и r_1. Опредѣлить объемъ шара.

Комбинаціи геометрическихъ тѣлъ съ частями шара. Комбинаціи шаровъ другъ съ другомъ.

При рѣшеніи задачъ этого отдѣла примѣняются соображенія и формулы, указанныя ранѣе.

962. Въ полушаръ вписанъ кубъ такъ, что четыре изъ его вершинъ лежатъ на основаніи полушара, а четыре другихъ на поверхности полушара. Опредѣлить поверхность и объемъ куба, зная, что радіусъ полушара равенъ $r=\sqrt{6}$ см.

963. Шаръ, радіусъ котораго равенъ r, разсѣченъ плоскостью, проходящей на разстояніи половины радіуса отъ центра шара. Въ окружность сѣченія вписанъ квадратъ, вершины угловъ котораго соединены съ концами діаметра, проходящаго перпендикулярно къ сѣченію (черезъ центръ сѣченія). Опредѣлить объемъ образовавшейся двойной пирамиды.

964. Шаръ радіуса R пересѣченъ плоскостью, отстоящей на разстояніи a отъ центра. Въ каждый изъ образовавшихся сферическихъ сегментовъ вписанъ шаръ наибольшаго діаметра. Опредѣлить отношеніе объемовъ вписанныхъ шаровъ.

965. Въ полушаръ радіуса r, вписанъ цилиндръ, осевое сѣченіе котораго представляетъ квадратъ, а одно изъ основаній совпадаетъ съ основаніемъ полушара. Опредѣлить поверхность цилиндра.

966. Сферическая поверхность шарового сегмента S. Основаніе сегмента служитъ основаніемъ конуса, вписаннаго въ этотъ сегментъ. Опредѣлить поверхность и объемъ конуса, если высота сегмента h.

967. Въ сегментъ, отсѣченный отъ шара радіуса R, вписана правильная четыреугольная пирамида такъ, что вершины ея основанія лежатъ на окружности сѣченія. Опредѣлить боковую поверхность этой пирамиды, если высота сегмента h.

968. Шаръ радіуса R пересѣченъ плоскостью такъ, что объемъ одного изъ образовавшихся сегментовъ равенъ объему конуса, вписаннаго въ другой сегментъ и имѣющаго основаніемъ проведенное сѣченіе. Опредѣлить высоту меньшаго сегмента.

969. Полушаръ, радіусъ котораго равенъ $R=75$ см., пересѣченъ плоскостью, параллельной плоскости основанія полушара и отстоящей отъ него на разстояніи $m=72$ см. Опредѣлить поверхность и объемъ усѣченнаго конуса, вписаннаго въ шаровой слой.

970. Данъ полушаръ радіуса R; въ него вписанъ шаръ наибольшаго діаметра. Въ разстояніи a отъ большого круга полушара проведена параллельная основанію полушара плоскость. Опредѣлить объемы сегментовъ, отсѣкаемыхъ этой плоскостью отъ даннаго полушара и вписаннаго шара.

971. Въ шарѣ радіуса R сдѣлано цилиндрическое отверстіе, при чемъ ось цилиндра проходитъ черезъ центръ шара, а діаметръ отверстія равенъ радіусу шара. Опредѣлить объемъ оставшейся части шара.

972. Два шара, радіусы которыхъ r и r_1, взаимно пересѣкаются. Опредѣлить поверхность и объемъ тѣла, общаго обоимъ шарамъ, если разстояніе центровъ шаровъ равно d.

973. Четыре шара, радіусы которыхъ одинаковы и равны r, лежатъ на плоскости и касаются другъ друга. На нихъ положенъ пятый шаръ такого же радіуса. Опредѣлить объемъ пирамиды, вершины которой находятся въ центрахъ данныхъ шаровъ.

974. Четыре шара, радіусы которыхъ одинаковы и равны r, взаимно касаются другъ друга. Опредѣлить радіусъ шара, касающагося данныхъ шаровъ (2 случая).

975. Въ шарѣ радіуса R расположены шесть равныхъ между собою шаровъ такъ, что каждый изъ нихъ касается четырехъ изъ числа остальныхъ и даннаго шара. Опредѣлить радіусъ шара, находящагося между малыми шарами и касающагося ихъ.

Шаръ и правильные многогранники.

При рѣшеніи задачъ на опредѣленіе поверхностей и объемовъ шаровъ, вписанныхъ въ правильные многогранники, или описанныхъ около нихъ, примѣняются теоремы:

1. Около всякаго правильнаго многогранника можно описать шаръ.
2. Во всякій правильный многогранникъ можно вписать шаръ.
3. Центры шаровъ, вписаннаго въ правильный многогранникъ и описаннаго около него, совпадаютъ и лежатъ въ точкѣ пересѣченія перпендикуляровъ, возставленныхъ къ какимъ-либо двумъ гранямъ многогранника изъ центровъ окружностей, вписанныхъ въ эти грани (или описанныхъ около этихъ граней).

Общія формулы, выражающія поверхности и объемы правильныхъ многогранниковъ черезъ радіусы вписанныхъ или описанныхъ шаровъ, приведены въ отвѣтахъ къ зад. №№ 1055 и 1056.

976. Ребро куба a. Опредѣлить поверхность и объемъ вписаннаго въ кубъ шара.

977. Ребро куба a. Опредѣлить поверхность и объемъ описаннаго около куба шара.

978. Ребро тетраэдра a. Опредѣлить поверхность и объемъ вписаннаго въ тетраэдръ шара.

979. Ребро тетраэдра a. Опредѣлить поверхность и объемъ описаннаго около тетраэдра шара.

980. Ребро октаэдра a. Опредѣлить поверхность и объемъ вписаннаго въ октаэдръ шара.

981. Ребро октаэдра a. Опредѣлить поверхность и объемъ описаннаго около октаэдра шара.

982. Ребро додекаэдра a. Опредѣлить поверхность и объемъ описаннаго около додекаэдра шара.

983. Ребро додекаэдра a. Опредѣлить поверхность и объемъ вписаннаго въ додекаэдръ шара.

984. Ребро икосаэдра a. Опредѣлить поверхность и объемъ вписаннаго въ икосаэдръ шара.

985. Ребро икосаэдра a. Опредѣлить поверхность и объемъ описаннаго около икосаэдра шара.

986. Радіусъ шара, описаннаго около тетраэдра R. Опредѣлить радіусъ шара, вписаннаго въ этотъ тетраэдръ.

987. Радіусъ шара, вписаннаго въ кубъ, равенъ r. Опредѣлить радіусъ шара, описаннаго около этого куба.

988. Радіусъ шара, вписаннаго въ октаэдръ, равенъ r. Опредѣлить радіусъ шара, описаннаго около этого октаэдра.

989. Радіусъ шара, описаннаго около додекаэдра, равенъ R. Опредѣлить радіусъ шара, вписаннаго въ этотъ додекаэдръ.

990. Радіусъ шара, вписаннаго въ правильный икосаэдръ, равенъ r. Опредѣлить радіусъ шара, описаннаго около этого икосаэдра.

991. Опредѣлить отношеніе поверхностей трехъ шаровъ, если поверхность одного изъ нихъ касается граней куба, поверхность другого касается его реберъ, а поверхность третьяго проходитъ черезъ вершины куба.

992. Рѣшить предыдущую задачу для 1) тетраэдра и 2) октаэдра.

993. Въ шаръ вписанъ кубъ. Въ какомъ отношеніи плоскость, проходящая черезъ грань куба, раздѣлитъ объемъ шара.

994. Въ шаръ вписанъ тетраэдръ. Въ какомъ отношеніи плоскость, проходящая черезъ грань тетраэдра, раздѣлитъ объемъ шара.

ОБЩІЙ ОТДѢЛЪ.

995. Изъ точекъ A и B плоскости проведены подъ угломъ въ 60° къ этой плоскости двѣ параллельныя прямыя, разстояніе между которыми m. Опредѣлить разстояніе AB.

996. Отрѣзокъ AB прямой параллеленъ плоскости P и отстоитъ отъ нея на разстояніи a. Изъ точки A проведена къ плоскости P наклонная AC, перпендикулярная къ AB и образующая съ плоскостью уголъ въ 45°. Черезъ точку C пересѣченія наклонной съ плоскостью и конецъ B отрѣзка AB проведена прямая, образующая съ отрѣзкомъ AB уголъ въ 60°. Опредѣлить длину отрѣзка AB.

997. Прямоугольный треугольникъ расположенъ надъ нѣкоторою плоскостью такъ, что вершины двухъ его угловъ, прилежащихъ къ одному изъ катетовъ, отстоятъ отъ этой плоскости на одинаковомъ разстояніи, равномъ n, а третья вершина — на разстояніи m (при чемъ $m > n$); проекціи катетовъ на эту плоскость равны a и b. Опредѣлить площадь этого треугольника.

998. Отрѣзокъ AB прямой, отложенный на ребрѣ прямого двуграннаго угла, служитъ гипотенузой прямоугольнаго треугольника съ катетами a и b, лежащаго въ плоскости одной изъ граней этого угла. Этотъ же отрѣзокъ служитъ діаметромъ полуокружности, проведенной въ плоскости другой грани этого угла. Опредѣлить разстояніе средней точки дуги полуокружности отъ вершины прямого угла треугольника.

999. Изъ точки A ребра прямого двуграннаго угла проведена прямая AB въ плоскости одной изъ граней этого угла, образующая съ ребромъ уголъ въ 45°. Такимъ же образомъ и въ томъ же

направленіи проведена изъ точки A прямая AC въ плоскости другой грани угла. Опредѣлить градусную мѣру угла BAC.

1000. На одной изъ граней нѣкотораго двуграннаго угла взята точка A, а на другой — точка B; разстояніе между ними 4 дцм., а разстоянія AC и BD этихъ точекъ отъ ребра двуграннаго угла одинаково и равно 2,8 дцм. Опредѣлить кратчайшее разстояніе между ребромъ двуграннаго угла и прямой AB и уголъ между ними, если разстояніе между основаніми перпендикуляровъ AC и BD равно $CD=2$ дцм.

1001. Опредѣлить градусную мѣру суммы всѣхъ плоскихъ угловъ и суммы всѣхъ двугранныхъ угловъ n-угольной призмы.

1002. Основаніемъ прямой призмы, высота которой равна $H=105$ см., служитъ ромбъ, діагонали котораго $d_1=16$ см. и $d_2=12$ см.; эта призма равновелика прямоугольному параллелепипеду, стороны основанія котораго соотвѣтственно равны $a=7$ см. и $b=24$ см. Опредѣлить діагональ параллелепипеда.

1003. Черезъ концы трехъ реберъ куба, выходящихъ изъ общей вершины, проведена плоскость, а черезъ концы трехъ реберъ, выходящихъ изъ вершины, противоположной первой, другая плоскость. Опредѣлить объемъ части куба, заключенной между этими плоскостями, если ребро куба $a=3$ см.

1004. Опредѣлить объемъ наклонной пятиугольной призмы, въ которой всѣ ребра одинаковы и равны a, при чемъ боковыя ребра образуютъ съ плоскостью основанія углы въ 60°.

1005. Основаніемъ прямой призмы служитъ прямоугольный треугольникъ, гипотенуза котораго $a=16{,}9$ см. Площади боковыхъ граней призмы, имѣющихъ основаніями катеты треугольника, соотвѣтственно равны $M=120$ кв. см., и $N=119$ кв. см. Опредѣлить полную поверхность призмы.

1006. Равносторонній треугольникъ служитъ общимъ основаніемъ прямой призмы и пирамиды, высоты которыхъ одинаковы, а боковая поверхность призмы въ n разъ больше боковой поверхности пирамиды. Опредѣлить отношеніе общей высоты этихъ тѣлъ къ сторонѣ основанія.

1007. Прямая призма, основаніемъ которой служитъ ромбъ со стороной a, пересѣчена плоскостью, непараллельной основанію призмы. Точка пересѣченія діагоналей полученнаго въ сѣченіи четыреугольника отстоитъ отъ плоскости основанія призмы на разстояніи m. Опредѣлить боковую поверхность этой усѣченной призмы.

1008. Гранями параллелепипеда служатъ ромбы, діагонали которыхъ равны d_1 и d_1; ($d_1>d_2$), при чемъ имѣются трегранные углы, составленные тремя острыми углами ромбовъ. Опредѣлить объемъ параллелепипеда.

1009. Основаніемъ прямой призмы служитъ прямоугольный треугольникъ, гипотенуза котораго 10 дюйм., а одинъ изъ острыхъ угловъ 15°. Если боковыя грани, образующія прямой двугранный уголъ, развернуть въ одну плоскость и провести въ нихъ діагонали изъ вершины прямого угла при основаніи, то онѣ образуютъ прямой уголъ. Опредѣлить объемъ призмы.

1010. Основаніемъ наклонной призмы служитъ треугольникъ ABC; перпендикуляръ, возставленный изъ вершины C къ плоскости основанія, встрѣчаетъ ребро A_1B_1, равное a, въ нѣкоторой точкѣ. Опредѣлить объемъ призмы, если площадь грани AA_1B_1B равна M, при чемъ эта грань образуетъ съ плоскостью основанія уголъ въ 60°.

1011. Объемъ нѣкотораго куба равенъ 1000 кб. см.; на каждой грани этого куба, какъ на основаніи, построена (внѣ куба) пирамида, высота которой относится къ ребру куба, какъ 0,9 : 1. Опредѣлить поверхность и объемъ полученной комбинаціи тѣлъ.

1012. Основаніемъ прямой призмы служитъ прямоугольникъ со сторонами $a=30$ см. и $b=54$ см.; высота призмы $H=36$ см. Каждое изъ основаній призмы служитъ основаніемъ прямой пирамиды, построенной внѣ призмы. Опредѣлить поверхность и объемъ полученной комбинаціи тѣлъ, если высота каждой пирамиды одинакова съ высотой призмы.

1013. Площади трехъ взаимно перпендикулярныхъ граней треугольной пирамиды соотвѣтственно равны $M=12$ кв. фут., $N=16$ кв. фут. и $P=24$ кв. фут. Опредѣлить площадь четвертой грани этой пирамиды.

1014. Въ правильной треугольной пирамидѣ ребро основанія a, а боковое ребро b. Эта пирамида усѣчена плоскостью, отсѣкающей отъ боковыхъ реберъ длины m, n и p (считая отъ вершины). Опредѣлить объемъ отсѣченной части пирамиды.

1015. Длина трехъ выходящихъ изъ одной вершины и взаимно-перпендикулярныхъ реберъ треугольной пирамиды соотвѣтственно равны $a=5$ фут., $b=6$ фут. и $c=7$ фут. Разстояніе точки, взятой внутри этой пирамиды, отъ трехъ граней, образованныхъ данными

ребрами, послѣдовательно равны $m=0,2$ ф., $n=0,3$ ф. и $p=0,4$ ф. Опредѣлить разстояніе этой точки отъ четвертой грани.

1015a. Сохраняя вопросъ предыдущей задачи, взять $m=2$ фут. $n=3$ фут. и $p=4$ фут. и предположить, что точка лежитъ внѣ пирамиды.

1016. Сторона квадрата $ABCD$ равна $a=3$ см. Изъ вершинъ A и C квадрата возставлены перпендикуляры $AE=b=7$ см. и $CF=c=5$ см. къ плоскости квадрата. Опредѣлить объемъ пирамиды, вершинами которой служатъ точки B, C, E и F.

1017. Боковые ребра треугольной пирамиды $a=8$ дцм., $b=9$ дцм. и $c=12$ дцм. Отъ этой пирамиды отсѣчена верхняя часть такъ, что боковые ребра отсѣченной пирамиды равны $a_1=5$ дцм., $b_1=6$ дцм. и $c_1=9$ дцм. Опредѣлить отношеніе объемовъ этихъ пирамидъ.

1018. Основаніемъ пирамиды служитъ правильный n-угольникъ, а боковыя ребра ея равны между собой. Опредѣлить сумму плоскихъ угловъ, составляющихъ тѣлесный уголъ при вершинѣ.

1019. Стороны основаній правильной четыреугольной усѣченной пирамиды соотвѣтственно равны $a=3$ см. и $b=2$ см.; боковая поверхность этой пирамиды равна суммѣ площадей ея основаній. Опредѣлить высоту этой усѣченной пирамиды.

1020. Длина бокового ребра пирамиды равна $c=8$ м.; на разстояніи $m=5$ м. отъ вершины (считая по ребру) проведена плоскость, параллельная основанію этой пирамиды. Опредѣлить отношеніе боковыхъ поверхностей пирамидъ полной и отсѣченной.

1021. На какомъ разстояніи отъ меньшаго основанія усѣченной пирамиды проходитъ плоскость, параллельная основаніямъ этой пирамиды, если площадь сѣченія a) среднее ариѳметическое b) средне геометрическое площадей основаній, которыя равны G и G_1, а высота усѣченной пирамиды равна H.

1022. Высота усѣченной пирамиды разсѣчена на 3 равныя части двумя плоскостями, параллельными основаніямъ этой пирамиды. Опредѣлить площадь каждаго изъ полученныхъ сѣченій, если площади основаній данной пирамиды соотвѣственно равны $G=14,4$ см. и $G_1=32,4$ см.

1023. Верхнее основаніе усѣченной пирамиды служитъ основаніемъ пирамиды, вершина которой лежитъ на нижнемъ основаніи усѣченной пирамиды. Въ какомъ отношеніи раздѣлить общую высоту этихъ пирамидъ плоскость, параллельная основаніямъ, если площадь сѣченія относится къ площади верхняго основанія, какъ $m^2:1=4:1$, а отношеніе площадей основаній равно $p^2:q^2=289:16$.

1024. Въ полушаръ радіуса R вписана правильная усѣченная шестиугольная пирамида такъ, что нижнее основаніе ея совпадаетъ съ плоскостью большого круга полушара. Опредѣлить поверхность и объемъ этой усѣченной пирамиды, если сторона верхняго основанія вдвое меньше стороны нижняго основанія ея.

1025. Стороны основанія треугольной призмы соотвѣтственно равны $a=52$ см. и $b=60$ см. и $c=56$ см., а высота ея $H=96$ см. Опредѣлить поверхности и объемы цилиндровъ вписаннаго въ эту призму и описаннаго около нея.

1026. Поверхность цилиндра равна 904,77 кв. см.; если увеличить его высоту на 36 см., то получится цилиндръ, поверхность котораго въ 3 раза больше поверхности даннаго. Опредѣлить объемъ новаго цилиндра.

1027. Изъ кругового кольца, радіусы котораго R и r, вырѣзана часть съ центральнымъ угломъ въ 288° и полученный отрѣзокъ образуетъ боковую поверхность усѣченнаго конуса. Опредѣлить объемъ этого конуса.

1028. Высота усѣченнаго конуса равна $H=42$ см., а радіусы его основаній $r=4$ см. и $r_2=2$ см. Опредѣлить поверхность конуса, равновеликаго данному усѣченному конусу, если извѣстно, что высота этого конуса равна $h=24$ см.

1029. Въ цилиндръ, радіусъ основанія котораго r, вписанъ конусъ такъ, что оси обоихъ тѣлъ взаимно перпендикулярны. Окружность основанія конуса касается обоихъ основаній и боковой поверхности цилиндра, а вершина конуса лежитъ на боковой поверхности цилиндра. Опредѣлить поверхность и объемъ конуса.

1030. Въ конусъ, осевое сѣченіе котораго представляетъ собой правильный треугольникъ, вписанъ шаръ, а въ шаръ вписанъ цилиндръ, осевое сѣченіе котораго есть квадратъ. Опредѣлить отношеніе поверхностей этихъ трехъ тѣлъ.

1031. Основанія цилиндра, осевое сѣченіе котораго представляетъ собою квадратъ, служатъ основаніями конусовъ, вершины которыхъ находятся въ центрахъ противоположныхъ основаній. Въ пространство, общее обоимъ конусамъ, вписанъ шаръ. Опредѣлить полную поверхность цилиндра, если радіусъ шара r.

1032. Опредѣлить отношеніе объемовъ шара и конуса, если извѣстно, что поверхность этого шара вдвое больше поверхности конуса, радіусъ основанія конуса 16 см., а отношеніе его высоты къ образующей равно 15 : 17.

1033. Около шара радіуса r описанъ усѣченный конусъ, образующая котораго l. Опредѣлить поверхность усѣченнаго конуса.

1034. Въ шаръ радіуса R вписанъ конусъ, объемъ котораго равенъ объему сегмента, отсѣкаемаго отъ даннаго шара основаніемъ конуса. Опредѣлить высоту конуса.

1035. Около шара радіуса r описанъ усѣченный конусъ. Изъ этого усѣченнаго конуса вырѣзаны два полныхъ конуса, основаніями которыхъ служатъ основанія усѣченнаго конуса, а образующія одного служатъ продолженіями образующихъ другого. Опредѣлить объемъ оставшейся части усѣченнаго конуса.

1036. Сумма объемовъ тѣлъ, полученныхъ отъ послѣдовательнаго вращенія треугольника около оси, совпадающей поочередно со сторонами его a и b, равна объему тѣла, которое получится отъ вращенія этого же треугольника около оси, совпадающей съ третьей его стороной. Опредѣлить длину третьей стороны.

1037. Около треугольника, стороны котораго a, b и c, описана окружность. Черезъ вершину, противолежащую сторонѣ a этого треугольника, проведена касательная къ окружности. Опредѣлить объемъ тѣла, полученнаго отъ вращенія даннаго треугольника около оси, совпадающей съ проведенной касательной.

1038. Объемы тѣлъ, образованныхъ послѣдовательнымъ вращеніемъ равнобедреннаго треугольника около оси, совпадающей съ каждой изъ неравныхъ сторонъ, соотвѣтственно равны V и V_1. Опредѣлить площадь этого треугольника.

1039. Прямоугольникъ со сторонами a и b вращается около оси, совпадающей съ его діагональю. Опредѣлить поверхность и объемъ тѣла вращенія.

1040. Два равныхъ ромба, діагонали которыхъ $d_1=69$ см. и $d_2=36{,}8$ см., наложены другъ на друга такъ, что точки пересѣченія ихъ діагоналей совпадаютъ, при чемъ меньшая діагональ одного сливается съ большей діагональю другого. Образовавшійся контуръ фигуры вращается около оси, совпадающей съ одной изъ діагоналей. Опредѣлить поверхность и объемъ тѣла вращенія.

1041. Равнобедренная трапеція, основанія которой $a=13$ см. и $c=20$ см., а діагональ $d_1=21$ см. вращается около оси, проходящей черезъ ея вершину параллельно діагонали. Опредѣлить поверхность и объемъ тѣла вращенія.

1042. Трапеція, стороны которой $a=120$ см., $b=53$ см., $c=68$ см. и $d=51$ см. ($a \parallel c$), вращается около оси, совпадающей со стороной a. Опредѣлить поверхность и объемъ тѣла вращенія.

1043. Объемъ тѣла, образованнаго вращеніемъ трапеціи около оси, совпадающей съ ея меньшимъ основаніемъ, равенъ $V=3696$ кб. см. Опредѣлить длину этого основанія, если высота трапеціи $h=7$ см., а длина средней линіи $m=21{,}5$ см.

1044. Правильный многоугольникъ, периметръ котораго P, вращается около оси (лежащей въ плоскости многоугольника), параллельной большей его діагонали и отстоящей отъ этой діагонали на разстояніи d (ось внѣ многоугольника). Опредѣлить поверхность тѣла вращенія.

1045. Правильный многоугольникъ, площадь котораго Q, вращается около оси (лежащей въ плоскости многоугольника), параллельной большей его діагонали и отстоящей отъ этой діагонали на разстояніи d (ось внѣ многоугольника). Опредѣлить объемъ тѣла вращенія.

1046. Изъ вершины A квадрата $ABCD$, какъ изъ центра, радіусомъ, равнымъ сторонѣ AD, описана дуга DB_1 и радіусомъ, равнымъ діагонали AC—дуга CE до пересѣченія въ точкѣ E со стороной AB квадрата. Опредѣлить поверхность и объемъ тѣла, полученнаго отъ вращенія фигуры $DCEB$ около оси, проходящей черезъ вершину A перпендикулярно діагонали AC, если сторона квадрата равна a.

1047. Точка A находится отъ поверхности шара радіуса R на разстояніи, равномъ діаметру этого шара. Какую часть поверхности шара можно видѣть изъ точки A?

1048. Свѣтящійся шаръ радіуса R освѣщаетъ не свѣтящійся шаръ радіуса r. Опредѣлить отношеніе освѣщенной части поверхности послѣдняго шара къ его неосвѣщенной части, если разстояніе между центрами шаровъ d.

1049. Шаръ, радіусъ котораго равенъ $5a$, разсѣченъ плоскостью такъ, что радіусъ окружности сѣченія равенъ $4a$. Сравнить шаровую часть поверхности образовавшагося сферическаго сектора съ боковой поверхностью конической его части.

1050. Шаръ радіуса $R=13$ см. пересѣченъ двумя параллельными плоскостями, разстояніе между которыми $h=7$ см. Объемъ части шара, заключенной между этими плоскостями, составляетъ $\frac{m}{n}=\frac{973}{4394}$ объема шара. Опредѣлить разстояніе каждой изъ сѣкущихъ плоскостей отъ центра шара.

1051. Шаръ, радіусъ котораго равенъ 30 см., разсѣченъ плоскостью такъ, что отношеніе объема меньшаго шарового сегмента къ объему вписаннаго въ него конуса, той же высоты, равно 14 : 9. Опредѣлить поверхность и объемъ меньшаго шарового сегмента и отношеніе объемовъ большаго сферическаго сегмента и описаннаго около него конуса.

1052. Шаръ пересѣченъ плоскостью такъ, что поверхность этого шара раздѣлилась въ отношеніи $m:n$. Опредѣлить отношеніе объемовъ образовавшихся шаровыхъ сегментовъ.

1053. Радіусы основаній сферическаго слоя r и r_1, а радіусъ сѣченія, равноотстоящаго отъ основаній r_2. Опредѣлить сферическую поверхность слоя.

1054. Опредѣлить объемъ двояковыпуклаго сферическаго стекла, радіусы кривизны котораго $r=15$ см. и $r_1=23$ см., а толщина стекла равна $d=6$ см.

1055. Вывести общую формулу для вычисленія поверхности всякаго правильнаго многогранника по данному его ребру, введя для сокращенія слѣдующія обозначенія: N — число граней правильнаго многогранника, a_n — его ребро, n — число реберъ каждой грани, r — радіусъ шара, вписаннаго въ правильный многогранникъ и R — радіусъ шара, описаннаго около него.

Замѣчаніе. Слѣдуетъ имѣть въ виду, что въ каждомъ частномъ случаѣ N и n будутъ имѣть вполнѣ опредѣленныя значенія, а r и R выразятся въ зависимости отъ величины ребра a_n.

1056. Вывести общую формулу для вычисленія объема всякаго правильнаго многогранника по данному его ребру, пользуясь обозначеніями предыдущей задачи.



ОТВѢТЫ.

1. $\sqrt{a^2-b^2}=9$ дцм. **2.** $\sqrt{d^2+r^2}=20$ дм. **3.** $\sqrt{c^2-a^2}-\sqrt{b^2-a^2}=4$ см. **Указаніе.** Отрѣзки a, b и c взять въ одной плоскости. **4.** $a\sqrt{\frac{q^2-1}{p^2-q^2}}=2\sqrt{6}$ см.; $ap\sqrt{\frac{q^2-1}{p^2-q^2}}=26\sqrt{6}$ см. **5.** $\sqrt{b^2-a^2}=35$ дм.; $\sqrt{c^2-a^2}=5$ дм. **6.** $\frac{2}{3}(m+\sqrt{4m^2+3h^2})=3^1/_3$ дцм. **Указаніе.** Медіана гипотенузы равна половинѣ гипотенузы. **7.** $\frac{a}{2}\sqrt{2}=12{,}69$ см. **8.** $\sqrt{(b-a)^2+c^2}=15$ дцм. **9.** a) $2\sqrt{b^2-a^2}=6\sqrt{3}$ дцм.; $b)$ $\sqrt{3(b^2-a^2)}=9$ дцм.; c) $\sqrt{2(b^2-a^2)}=3\sqrt{6}$ дцм.; $d)$ $\sqrt{b^2-a^2}=3\sqrt{3}$ дцм.; e) $\sqrt{(b^2-a^2)(2-\sqrt{3})}=3\sqrt{3(2-\sqrt{3})}$ дцм. **10.** $\sqrt{\frac{a^2n^2-b^2m^2}{n^2-m^2}}=11{,}22$ дцм. **11.** $\frac{b(a-n)}{a}=8$ см. **12.** $\frac{m}{m+n}\sqrt{a^2-p^2}=4{,}8$ см.; $\frac{n}{m+n}\sqrt{a^2-p^2}=7{,}2$ см. **13.** 1,71 см. **14.** $\frac{1}{2m}\sqrt{4m^2b^2+(b^2-m^2-a^2)^2}=6{,}5$ см. **15.** $a-\sqrt{c^2-m^2}=11{,}4$ дцм.; $a-\sqrt{b^2-m^2}=4{,}8$ дцм. **16.** a) $\frac{a+b}{2}=11$ см; $b)$ $\frac{a-b}{2}=4$ см. **17.** 3,2. **Указаніе.** Разстоянія точекъ C и D отъ плоскости опредѣляются изъ разсмотрѣнія подобныхъ прямоугольныхъ треугольниковъ, а разстояніе средней точки отрѣзка CD отъ плоскости—на основаніи свойства средней линіи трапеціи. **18.** $\frac{am}{m+n}=3{,}75$ дцм. **19.** 5 см. **20.** $\frac{mb+na}{m+n}=20$ см.; $\frac{mb-na}{m-n}=14$ см. **21.** $\frac{a+b+c}{3}=14$ дцм. **22.** $a+c-b=5{,}5$ дцм. **23.** $\frac{a+b}{2}=13{,}5$ дюйм.; $\frac{b+c}{2}=17$ дюйм.; $\frac{a+c}{2}=15{,}5$ дюйм.

24. $\frac{1}{2}\sqrt{2a^2+d^2}$. **25.** 24 см. **26.** $\frac{a\sqrt{b^2-a^2}}{b}=4{,}8$ дюйм. **27.** $\sqrt{2(b^2-a^2)}=$ $=20$ см. **28.** $\frac{1}{2}\sqrt{4m^2+b^2}=7{,}5$ см. **29.** $\sqrt{a^2+(n-m)^2}=1$ ф. **30.** 14,5 вершк. **31.** $\sqrt{2(b^2-a^2)}=7{,}05$ дюйм. **32.** $\sqrt{b^2+c^2-a^2}=$ $=13{,}5$ дцм. **33.** $\frac{1}{3}\sqrt{3(4b^2-a^2)}=3{,}6$ дюйм. **34.** $\frac{3\sqrt{3}}{4}(b^2-c^2)=12$ кв. м.; $\frac{1}{4}\sqrt{3(b^2-c^2)(b^2+3c^2)}=9$ кв. м. **35.** $\sqrt{a^2+b^2+c^2}=7{,}05$ м. **36.** 0,68 дцм.; 0,76 дцм. **37.** 493,99 кв. см. **Указаніе.** Треугольникъ AMN—равнобедренный. **38.** 13 см.; 13 см.; $6\sqrt{5}$ см. **39.** $\frac{ab}{c+b}=11^{8}/_{17}$ ф.; $\frac{ac}{c+b}=3^{9}/_{17}$ ф. **40.** $\frac{1}{2}\sqrt{(a+b)(b+c)(c-b)(b-a)}=$ $=18$ кв. см. **41.** $\sqrt{2b^2-a^2}=10{,}9$ дцм. **42.** $\sqrt{\left(\frac{abc}{4\triangle}\right)^2+h^2}=$ $=26{,}93$ кв. см., гдѣ $\triangle$— площ. даннаго тр-ка. **Указаніе.** Воспользоваться формулой $R=\frac{abc}{4\triangle}$. **43.** 13 см. **44.** 15 см.; 4,8 см. **45.** $\frac{1}{2c}\sqrt{4(b^2+h^2)c^2-(b^2+c^2-a^2)^2}=10{,}2$ см. **46.** $\frac{bc}{a-b}=7{,}5$ см.; $\frac{ac}{a-b}=12{,}5$ см. **47a.** $\sqrt{b^2+(a-\sqrt{c^2-b^2})^2}=30$ см. Задача допускаетъ 2 рѣшенія. **47b.** 1) 0; 2) 0; 3) 12 см.; 4) 20 см. **Указаніе.** Провести плоскость, перпендикулярную къ даннымъ прямымъ и проходящую черезъ данную точку. **48.** $\frac{b(a+c)}{c}=9$ см. **49.** $\frac{a}{b}\sqrt{b^2-a^2}=2{,}4$ дм. **50.** 50 см. **51a.** $\sqrt{a^2+b^2}=37$ дюйм. **51b.** $\sqrt{a^2+b^2-c^2}=20$ см. **52.** 6 см. **53.** $\frac{b(a+c)}{a}=24{,}75$ м. **Указаніе.** Точки D, N и E лежатъ въ одной плоскости. **54.** $\frac{2}{a}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(a+c-b)}=$ $=12\frac{12}{13}$ см. **55.** $d\pm\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, гдѣ $p=\frac{a+b+c}{2}$; 27 см. или 3 см. **Указаніе.** Разсмотрѣть два случая—когда AB находится ближе къ плоскости, чѣмъ двѣ другія прямыя, и когда AB находится дальше отъ нея, чѣмъ двѣ другія прямыя. **56.** Прямой уголъ будетъ проектироваться на данную плоскость въ видѣ прямого угла въ томъ случаѣ, если одна изъ его сторонъ будетъ лежать

въ плоскости, проходящей черезъ вершину прямого угла параллельно данной плоскости; если обѣ стороны прямого угла будутъ лежать на одну сторону проведенной плоскости, то проекція будетъ тупымъ угломъ, а если сторона прямого угла будетъ лежать по обѣ стороны проведенной плоскости, то проекція будетъ острымъ угломъ. **57.** $\frac{bc}{a+b}=3{,}9$ дюйм. **58.** 9 саж.; 12 саж. **59.** $\sqrt{a^2-b^2+c^2}=9$ дцм. **60.** $\frac{ac}{b}=3$ дюйм. **61.** $\frac{ac}{a+b}=18$ см.; $\frac{bc}{a+b}=27$ см. **62.** $\sqrt{a^2+(c-b)^2}=5$ см.; $\frac{1}{2}\sqrt{a^2+(c+b)^2}=8{,}79$ см. **63.** $\sqrt{\frac{a^2n^2-m^2b^2}{n^2-m^2}}=15$ см. **64.** $\frac{a^2-b^2+d^2}{2d}=5$ дцм.; $\frac{b^2-a^2+d^2}{2d}=9$ дцм. **65.** $\sqrt{a^2+b^2+c^2}=17$ см. **66.** $\sqrt{a^2+b^2+c^2-bc\sqrt{3}}=10{,}81$ см. **67.** $\frac{ab}{2\sqrt{a^2-b^2}}=6\frac{2}{3}$ дюйм. **Указаніе.** Разсмотрѣть подобіе образовавшихся прямоугольныхъ треугольниковъ. **68.** $a+b$. **Указаніе.** Треугольникъ BAD—равнобедренный. **69.** Равнобедренный; $\sqrt{b^2-a^2}+\sqrt{4b^2-a^2}=$ $=24{,}39$ фут. **70.** $\frac{kn^2}{m^2}$ кв. ед. **71.** $\sqrt{a^2+b^2-c^2}=15$ дюйм. **72.** $ab:\sqrt{b^2+c^2-2b\sqrt{c^2-a^2}}=21{,}09$ см. **73.** $\frac{ac}{b}=12$ вершк. **74.** 1) $2a=20$ см.; 2) $\frac{2a\sqrt{3}}{3}=11{,}53$ см.; 3) $a\sqrt{2}=14{,}1$ см. 4) $a(\sqrt{5}+1)$. **74a.** $2m=12$ дцм.; $m\sqrt{2}=8{,}46$ дцм.; $\frac{2m\sqrt{3}}{3}=6{,}92$ дцм. **75.** $\frac{a}{2}$; $\frac{a\sqrt{2}}{2}$; $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **76.** $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$. **77.** $a\sqrt{5+2\sqrt{5}}$. **78.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$; **79.** 60°. **Указаніе.** Отложить отъ точки A по прямой AB произвольное разстояніе a и изъ полученной точки D опустить перпендикуляръ DE на проекцію отрѣзка AB на плоскость P, а изъ точки E опустить перпендикуляръ EF на прямую AC. Выразить черезъ a длину отрѣзка DF и разсмотрѣть $\triangle ADF$. **80.** $a\sqrt{4-\sqrt{3}}$. **Указаніе.** См. зад. № 401 въ I части задачника. **81.** $\frac{a}{2}\sqrt{1+2\sqrt{3}}$. **Указаніе.** Слѣдуетъ вычислить разность разстояній

точекъ B и C отъ плоскости P; для этого надо изъ точекъ B и C опустить перпендикуляръ на прямую, выходящую изъ точки A и перпендикулярную плоскости P. **82.** $\sqrt{a^2+b^2+c^2-ac\sqrt{2}}$. **83.** $2a(a+\sqrt{a^2-m^2})$. **84.** $\sqrt{4a^2-b^2}+\sqrt{2a^2-b^2}=11{,}74$ дм. Задача возможна при условіи существованія неравенства: $a\sqrt{2}\geqslant b\geqslant a$. **85.** $\frac{a}{3}(3-\sqrt{3})$. **86.** 90°. **87.** a) 150°; b) 135°; c) 120°; d) 109°40′; e) 37°41′44″. **88.** a^2+b^2. **89.** $b\sqrt{3}=6{,}92$ см. **90.** $\frac{a}{2}=5$ метр. **91.** $\sqrt{a^2+b^2+c^2}=22{,}5$ дюйм. **92.** Замѣнить. **93.** 90°. **94.** 30°. **95.** $\sqrt{2}$. **96.** $\frac{ac}{b}=2{,}5$ см. **97.** $2a=8$ см. **98.** $a\sqrt{2}=11{,}28$ см. **99.** $\frac{1}{2}\sqrt{2(2b^2-a^2)}=16{,}9$ фут. **100.** a^2+b^2. **101.** $\frac{a}{2b}\sqrt{3(b^2-a^2)}=2{,}08$ дюйм. **102.** $\frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{c}=7$ дюйм., гдѣ $p=\frac{a+b+c}{2}$. **103.** $\sqrt{2}-1$. **104.** $\frac{S\sqrt{3}}{2}=41{,}52$ кв. дюйм. **105.** 1) лежать; 2) нѣтъ. **106.** 1) можетъ; 2) нѣтъ, такъ какъ сумма угловъ больше 360°; 3) нѣтъ, такъ какъ $82°+67°<151°$. **107.** $211°>x>26°30'$. **108.** $180°>x>60°$. **109.** $\sqrt{\frac{b^2+c^2-a^2}{2}}=9{,}5$ см.; $\sqrt{\frac{a^2+b^2-c^2}{2}}=7{,}1$ см.; $\sqrt{\frac{a^2+c^2-b^2}{2}}=3{,}2$ см. **110.** $2a(1+\sqrt{3})$. **111.** 90°. **Указаніе.** Изъ произвольной точки ребра, общаго равнымъ плоскимъ угламъ, провести плоскость, перпендикулярную этому ребру. Разсмотрѣть зависимость сторонъ полученнаго въ сѣченіи тр-ка. **112.** 3; 4; 5; 6; 7 и 8. **113.** Меньше $\frac{360°}{n}$ и больше 0. **114.** 1) нѣтъ; 2) нѣтъ, такъ какъ сумма угловъ равна 360°, вслѣдствіе чего они будутъ лежать въ одной плоскости; 3) можетъ; 4) нѣтъ, такъ какъ $32°+49°+78°<162°$. **115.** $\frac{m+n-p}{4}=7$ д.; $\frac{m+p-n}{4}=5$ д.; $\frac{n+p-m}{4}=8$ д. **116.** $\frac{a\sqrt{6}}{3}=3{,}27$ см.

116a. $m(\sqrt{3}+\sqrt{2})=6{,}28$ см. **117.** $\sqrt{a^2+b^2-c^2}=8{,}5$ ф.; $\sqrt{a^2+b^2}=7{,}21$ ф., $\sqrt{b^2+c^2}=7{,}5$ ф., $\sqrt{a^2+c^2}=6{,}02$ ф. **118.** $\frac{Dm}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}}=4$ см.; $\frac{Dn}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}}=6$ см.; $\frac{Dp}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}}=12$ см. **119.** $\sqrt{D^2+2B-p^2}$; $\frac{1}{2}(p\pm\sqrt{p^2-4B})$; 8 дцм.; 9 дцм.; 12 дцм. **120.** $\frac{1}{2}\sqrt{2(d_1{}^2+d_2{}^2+d_3{}^2)}=17$ см. **121.** $\sqrt{\frac{MN}{P}}=8{,}4$ ф.; $\sqrt{\frac{MP}{N}}=4\frac{2}{7}$ ф.; $\sqrt{\frac{NP}{M}}=5\frac{5}{6}$ ф. **122.** $\sqrt{b^2+d^2}=10$ см.; $\sqrt{4a^2-d^2+b^2}=11{,}28$ см. **123.** $\sqrt{\frac{2m^2(a^2+b^2)}{m^2+n^2}+c^2}=16{,}14$ см.; $\sqrt{\frac{2n^2(a^2+b^2)}{m^2+n^2}+c^2}=12{,}15$ см. **Указаніе.** Примѣнить теорему о суммѣ квадратовъ діагоналей параллелограмма. **124.** a) $57\frac{2}{3}$ кв. см.; b) 5,64 кв. м.; c) 18 кв. фут. **125.** $\frac{p}{16}\sqrt{p^2+64a^2}=0{,}65$ кв. м. **126.** $c\sqrt{a^2+b^2}=195$ кв. д.; **127.** $a\sqrt{b^2+c^2}=100$ кв. см.; $b\sqrt{a^2+c^2}=208$ кв. см. **128.** $\frac{1}{2a}(\sqrt{M^2+2a^2B}\pm\sqrt{M^2-2a^2B})$; 7 см. и 24 см. **129.** $Q\sqrt{2}=18$ кв. см. **130.** $d\sqrt{D^2-d^2}=60$ кв. ф. **131.** $\frac{a}{2}\sqrt{a^2+2b^2}=176{,}9$ кв. дцм. **132.** $\sqrt{(2aH+M)(2aH-M)}=360$ кв. см. **133.** $a^2\sqrt{3}=62{,}28$ кв. верш.; $2a=12$ верш.; $a\sqrt{2}=8{,}46$ вершк. **134.** $H\sqrt{a^2+b^2-ab}=87$ кв. дцм.; $H\sqrt{a^2+b^2+ab}=136{,}32$ кв. дцм. **135.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}=7$ см. **136.** $\frac{1}{2}\sqrt{m^2n^2+m^2p^2+n^2p^2}=1{,}95$ кв. ф. **137.** $\frac{3a^2\sqrt{3}}{4}=46{,}71$ кв. см. **138.** $\frac{ab\sqrt{3}}{2}=5{,}196$ кв. фут. **139.** $\frac{1}{2}\sqrt{16Q^2-3a^4}=39{,}23$ кв. см. **140.** $\frac{2B\sqrt{3}}{3}=24$ кв. см. **141.** $\frac{a^2\sqrt{7}}{16}=2{,}65$ кв. фут. или $\frac{3a^2\sqrt{15}}{16}=11{,}62$ кв. фут. **142.** $\frac{2H}{3}\sqrt{p^2+2m^2-\sqrt{4m^4-5m^2p^2+p^4}}=8{,}61$ кв. ф. **143.** $M:M_1=$

$=1:5$. **144.** $\frac{a}{2}\sqrt{2(2a^2+b^2)}=12,61$ кв. см. **145.** $\frac{3a}{2}\sqrt{b^2+3a^2}=$ $=83,52$ кв. см. **146.** 1) $\sqrt{P^2+Q^2-2QM}=18,08$ кв. фут.; 2) $\sqrt{P^2+Q^2-2QN}=33,27$ кв. фут. **147.** $\frac{2acH}{a+c}=48$ кв. см. **Указаніе.** Прямая, проходящая черезъ точку пересѣченія діагоналей основанія призмы, дѣлится въ этой точкѣ пополамъ. **148a.** $6a^2=$ 1944 кв. см. **148b.** $\frac{m^2}{24}=13,5$ кв. дюйм. **149.** $3d^2=17,28$ кв. дцм. **150.** $2D^2=38$ кв. ф. **151.** $\frac{a\sqrt{n}}{m}=16,17$ см. **152.** 2 : 3. **153.** 3 м. и 5 м. **154.** $3Q\sqrt{2}=96$ кв. дцм. **155.** $2a(a+2H)=210$ кв. см. **156.** $\frac{S_б^2}{16H^2}=4,9$ кв. м. **157.** $\frac{1}{2}\sqrt{4H^2+2S}-H=8$ дюйм. **158a.** $(S-2a^2):4a=9$ фут. **158b.** 9,7 фут. **159.** $S_б:2\sqrt{2(S-S_б)}=$ $=11$ см. **160.** $2H\sqrt{2(d^2-H^2)}+d^2-H^2=24,46$ кв. дцм. **161.** $2\sqrt{D^2-d^2}(2\sqrt{2d^2-D^2}+\sqrt{D^2-d^2})=192$ кв. фут. **162.** $2(ab+ac+bc)=184$ кв. см. **163.** $\frac{S-2ab}{2(a+b)}=10$ см. **164.** $\frac{2(a+b)Q}{\sqrt{a^2+b^2}}=8$ см. **165.** $\frac{aS}{2(a^2+B)}=8$ дцм. **166.** $\frac{S-2aH}{2(a+H)}=12$ дцм. **167.** $\frac{S-S_б}{2a}=10$ ф.; $\frac{aS_б}{2a^2+S-S_б}=18$ ф. **168.** $\frac{1}{4H}(S\pm\sqrt{S^2-16H^2B})$; 5 м. и 6 м. **169.** 60,16 кв. ф. **170.** $m\sqrt{\frac{S}{2(mn+mp+np)}}=3$ дцм.; $n\sqrt{\frac{S}{2(mn+mp+np)}}=4,5$ дцм.; $p\sqrt{\frac{S}{2(mn+mp+np)}}=10,5$ дцм. **171.** Увеличится въ $1^1/_2$ раза. **172.** $2(a+b)c+4\Delta=1126$ кв. д., гдѣ Δ—площ. тр-ка со сторонами a, b и d. **173.** $2[(a+b)c+B]=$ 405 кв. см. **174.** 8047 кв. см. **175.** 2,5 дцм. и 9 дцм **176.** 3 м. и 7 м. **177.** $2(a+b)c+ab\sqrt{3}=207,1$ кв. см. **178.** $4ab+d\sqrt{4a^2+d^2}=264$ кв. см. **179.** $2H\sqrt{d^2+d_1^2}+dd_1=$ $=11,4$ кв. дцм. **180.** 13,58 кв. дцм. **181.** $2pp_1-p^2=27$ кв. см. **182.** 10 дцм. и 24 дцм. **183.** 5 дюйм. **184.** $a(4b+a\sqrt{2})=$ $=474,24$ кв. дюйм. **185.** $\frac{S-a^2\sqrt{3}}{4a}=12$ фут. **186.** $\frac{d}{3}\left(\frac{4m}{n}+\sqrt{3}\right)=$

$=298,21$ кв. дцм. **187.** $3ah+\frac{a^2\sqrt{3}}{2}=1111,28$ кв. вершк. **188.** $n\sqrt{\frac{2S}{6n+\sqrt{3}}}=6,03$ дцм. **189.** 1811,52 кв. дцм. **190.** $\frac{S}{3a}=$ $=9$ арш.; $S+\frac{a^2\sqrt{3}}{2}=156,625$ кв. арш. **191.** $\frac{S_б}{3H}=4$ см.; $S_б+\frac{S_б^2\sqrt{3}}{16H^2}=$ $=99,57$ кв. см. **192.** $\sqrt{3H^2+\frac{2S\sqrt{3}}{3}}-H\sqrt{3}=6$ см. **193.** $\sqrt{\frac{2(S-S_б)\sqrt{3}}{3}}=6$ см.; $S:\sqrt{6\sqrt{3}(S-S_б)}=7$ см. **194.** $2(H\sqrt{3B\sqrt{3}}+2B)=168,48$ кв. см. **195.** $2(a+b)H+$ $+\frac{b}{2}\sqrt{4a^2-b^2}=1844,18$ кв. дцм. **196.** $\frac{S}{2a+b}-\frac{b}{2}\sqrt{\frac{2a+b}{2a-b}}=10$ см. **197.** $\frac{1}{2b}\sqrt{4(S-S_б)^2-b^4}=13$ дюйм.; $H=8$ дюйм. **198.** $\frac{S_б}{2a}+\sqrt{a^2+S-S_б}\pm\sqrt{a^2-S+S_б}$; 6,32 дцм. или 6,94 дцм. **199.** $\frac{S_б-2aH}{2H^2}\sqrt{(S_б+aH)(3aH-S_б)}=108$ кв. фут. **200.** $bS_б:(b^2+\sqrt{b^4-16B^2})=10$ см. **201.** $(a+b+\sqrt{a^2+b^2})H+ab=$ $=1440$ кв. см. **202.** $\frac{2B}{mn}(m^2+n^2+\sqrt{m^2+n^2})=540$ кв. см. **203.** 120 кв. см. **204.** $(a+b+c)H+2\Delta=5112$ кв. см., гдѣ Δ—площ. тр-ка со сторонами a, b и c. **205.** $\frac{S_б}{H}-(a+b)=20$ дцм. **206.** $c=\sqrt{a^2+b^2-2\sqrt{a^2b^2-(S-S_б)^2}}=10,5$ см.; $\frac{S_б}{a+b+c}=20$ см. **207.** 13 и 20 см. **208.** 49,19 дцм. и 301,81 дцм. **209.** $(a+2b+c)H+$ $+(a+c)\sqrt{b^2-\frac{(c-a)^2}{2}}=85$ кв. дцм. **210.** $2H\left[\frac{B}{h}+\sqrt{h^2+\left(\frac{B}{h}-a\right)^2}\right]=$ $=741$ кв. дцм. **211.** $\frac{a^2}{2}\sqrt{5(5+2\sqrt{5})}+5aH=180,97$ кв. ф. **212.** 46,59 кв. см. **213.** 553,78 кв. фут. **214.** $3a\,(a\sqrt{3}+2H)=$ $=134,97$ кв. см. **215.** $4a^2\left(2+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=23,2$ кв. см.

216. 453,56 кв. дюйм. **217.** 8,09 кв. см. **218.** $\sqrt{\frac{S}{3(2+\sqrt{3})}}=$ $=88$ фут. **219.** $\frac{3(a\sqrt{3}+2H)}{2(a+2H)}=1,73$ дцм. **220.** 565,52 кв. см.

221. 457,65 кв. дцм. **222.** $4r(r\sqrt{2}+2H\sqrt{2-\sqrt{2}})=145,09$ кв. ф.; $16r(H+r)(\sqrt{2}-1)=159,06$ кв. ф. **223.** $5RH(\sqrt{5}-1)=0,62$ кв. ф.

224. 7,05 кв. ф. **225.** 962,97 кв. дцм. **226.** 171,61 кв. см.

227. 146,38 кв. м. **228.** $3ab+2B=120$ кв. дюйм. **229.** $\frac{S_б}{a+b+c}=$ $=44,5$ см. **230.** $3ab=129,9$ кв. д. **231.** $2p\sqrt{H^2+m^2}=780$ кв. см.

232. $[S-a(m+n)]:a=3$ дюйм. **233.** $2ch\sqrt{3}=173,2$ кв. см.

234. $4c\sqrt{2B}=376$ кв. метр. **235.** $(a\sqrt{3}+b)c=101,2$ кв. см.

236. $2ab=120$ кв. д. **237.** $(a\sqrt{2}+b\sqrt{3})c+2ab=300,24$ кв. см.

238. $(ab+ac+bc)\sqrt{2}=150,87$ кв. см. **239.** $5ac=35$ кв. м.

240. $2cd\sqrt{3}=11,08$ кв. дцм. **241.** $\frac{S_б(\sqrt{5}+1)}{10r}=3,24$ см.

242. $a+c-b=13,5$ дцм. **Указаніе.** Провести діагонали основанія и непараллельнаго сѣченія, соединить точки пересѣченія діагоналей и воспользоваться свойствомъ средней линіи трапеціи.

243. $3a+b-c=6,23$ фут. **244.** $\frac{(a+2b+c)m}{2}=150$ кв. см.; $\sqrt{m^2+b^2}=15$ см.; $\frac{1}{2}\sqrt{4m^2+(a+c)^2}=20$ см. **245.** $a+2c-2b=12$ ф.; $2a+2c-3b=10$ ф.; $2a+c-2b=9$ ф. **246.** $\frac{n}{2}(a+b)+\frac{m}{2}(a+b+2c)=$ $=3,2$ кв. дцм. **247.** $\frac{1}{2}[(a+b+c)(m+n+p)-ap-bn-cm]=$ $=40,75$ кв. ф. **248.** $\frac{1}{2n}[(a+b+c)(M+N+P)-aP-bN-cM]=$ $=26,125$ кв. дцм. **249.** $\frac{1}{2}[(a+c)n+(a+b)p+(b+c)m]=267$ кв. дцм.

250. 584,38 кв. дцм. **251.** $\frac{a}{2}(6H+a+\sqrt{H^2+4a^2})=366$ кв. см.; $\frac{a}{2}(2H+2a+\sqrt{H^2+4a^2})=192$ кв. см. **252.** $2\sqrt{13-6\sqrt{2}}$ дюйм.; $\sqrt{17+\sqrt{2}}$ дюйм. **253.** $\frac{aH}{a+b}=15$ см.; $\frac{bH}{a+b}=21$ см.

254. $\frac{Bn^2}{m^2}=27$ кв. ф. **255.** $\frac{p^2B}{(m+n+p)^2}=16$ кв. дцм. $\frac{(n+p)^2B}{(m+n+p)^2}=81$ кв. дцм. **256.** $H\sqrt{\frac{B_1}{B}}=3$ арш.

257. $H\left(1-\sqrt{\frac{B_1}{B}}\right)=7$ см. **258.** $\frac{n^2B}{(m+n)^2}=27$ кв. фут.

259. $\frac{M(m+n)^2}{(2m+n)n}=49$ кв. см. **260.** $\frac{a^2}{2}(\sqrt{2}+1)=43,38$ кв. см.

261. 105 кв. метр. **262.** 14,87 кв. метр. и 23,38 кв. метр.

263. $\frac{a}{4}\sqrt{3b^2-a^2}=11,49$ кв. д. **264.** $\frac{a^2}{8}\sqrt{11-4\sqrt{2}}=7,81$ кв. дцм.

265. 1,8 кв. см. **266.** $2Q=68$ кв. см. **267.** $a\sqrt{\frac{2}{11}}=1,02$ дцм.

268. $\frac{3a\sqrt{7}}{8}=7,94$ см. **269.** $\frac{1}{2}\sqrt{b^2c^2+b^2d^2+c^2d^2}=7,81$ кв. см.

270. $\frac{a}{2}\sqrt{2b^2-a^2}=8,46$ кв. фут. **271.** $\frac{3a}{16}\sqrt{4b^2-a^2}=9$ кв. дюйм. **Указаніе.** Площадь полученнаго сѣченія составляетъ $\frac{3}{4}$ площади боковой грани пирамиды. **272.** $\frac{3a^2\sqrt{3}}{8}=4,16$ кв. вершк.

273. $\frac{a}{8}\sqrt{8H^2+2a^2}=7,62$ кв. см. **274.** $a\sqrt{\frac{2n-m}{2m}}=8,46$ вершк.

275. $\frac{a}{4}\sqrt{3(4H^2+a^2)}=25,22$ кв. см. **276.** $\sqrt{H^2-\frac{a^2}{3}}=11,4$ см.

277. $\sqrt{3(b^2-H^2)}=24$ фут. **278.** $\sqrt{\frac{4h^2-b^2}{3}}=3,6$ см.

279. $\sqrt{2(b+H)(b-H)}=0,4$ дцм. **280.** 12 м. **281.** $\sqrt{2h^2-b^2}=1$ ф.

282. $\frac{1}{2}\sqrt{4h^2-a^2}=4$ д. **283.** $\sqrt{h^2-\frac{a^2}{20}(5+\sqrt{5})}=21,8$ см.

284. $\sqrt{b^2-\frac{a^2}{10}(5+\sqrt{5})}=4,29$ см. **285.** $\sqrt{(b+a)(b-a)}=3,08$ дцм.

286. $\frac{1}{2}\sqrt{4H^2+3a^2}=8,54$ д. **287.** $\frac{1}{2}\sqrt{4a^2-2b^2(3+\sqrt{5})}=12,63$ дцм.

288. $\sqrt{2a^2+b^2}=10,66$ см.; $\sqrt{2b^2+a^2}=12,8$ см.; $\sqrt{2(a^2+b^2)}=$ $=14,14$ см. **289.** $\frac{1}{2}\sqrt{H^2(a^2+b^2)+a^2b^2}=6,5$ кв. см.

290. $\frac{1}{H}\sqrt{\frac{H^4(M^2+N^2)+M^2H^2}{M^2+N^2}}=20,8$ дцм. **291.** $\sqrt{\frac{1}{2}(a^2+b^2-c^2)}=$ $=2,45$ д.; $\sqrt{\frac{1}{2}(b^2+c^2-a^2)}=5,48$ д.; $\sqrt{\frac{1}{2}(a^2+c^2-b^2)}=4,36$ д.

292. $\frac{3ab}{2}=450$ кв. см. **293.** $\sqrt{\frac{4S^2}{9a^2}-\frac{a^2}{12}}=0,43$ м.

294. $3h\sqrt{b^2-h^2}+(b^2-h^2)\sqrt{3}=223,25$ кв. см. **295.** $\sqrt{H^2+\frac{a^2}{12}}=$ $=8,22$ см.; $\frac{3a}{2}\sqrt{H^2+\frac{a^2}{12}}=73,98$ кв. см. **296.** $\frac{3}{4}\sqrt{3(b^2-H^2)(b^2+3H^2)}=$ $=318,69$ кв. см. **297.** $\sqrt{b^2-\frac{a^2}{3}}=1,05$ дцм.; $\frac{a}{4}(a\sqrt{3}+3\sqrt{4b^2-a^2})=$ $=1,65$ кв. дцм. **298.** $\frac{4S-a^2\sqrt{3}}{6a}=1,29$ м.; $\frac{1}{3a}\sqrt{4S^2-2Sa^2\sqrt{3}}=1,16$ м.

299. $3\sqrt{3}(h\sqrt{h^2-H^2}+h^2-H^2)=20,78$ кв. ф. **300.** $\sqrt{3BH^2\sqrt{3}+B^2}+$ $+B=1435,42$ кв. дцм. **301.** $\frac{1}{3h}\sqrt{\frac{27h^4-S_6^2}{3}}=7,21$ д.; $\frac{1}{3h}\sqrt{3h^4-S_6^2}=10$ д. **302.** $\frac{2S_6}{3\sqrt{\frac{H^2}{2}+\sqrt{\frac{H^4}{4}+\frac{S_6^2}{27}}}}=36$ д.

303. 18,57 кв. м. **304.** $\sqrt{b^2+\frac{2S_6}{3}}\pm\sqrt{b^2-\frac{2S_6}{3}}$; 8 ф. или 6 ф.

305. $\frac{S-a^2}{2a}=10$ дцм. **306a.** $\sqrt{b^2-\frac{a^2}{2}}=4,68$ ф; $a\left[a+\sqrt{(2b+a)(2b-a)}\right]=16,47$ кв. ф. **306b.** $a^2(1+\sqrt{3})=$ $=211,57$ кв. ф. **307.** $4h\sqrt{b^2-h^2}=960$ кв. ф. **308.** $a(a+2h)=$ $=605$ кв. дцм. **309.** $\frac{S}{\sqrt{2(S-2H^2)}}=2$ дцм. **310.** $a(a+\sqrt{4H^2+a^2})=$ $=74,24$ кв. д. **311.** $2(b^2-H^2+H\sqrt{b^2-H^2})=408$ кв. д.

312. $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{S_6^2+(S-S_6)^2}{S-S_6}}=13,11$ д. **313.** $\frac{d^2}{2}(1+\sqrt{7})=$ $=18,25$ кв. дцм. **314a.** $\sqrt{\frac{S(\sqrt{3}-1)}{2}}=1,25$ м.

314b. $\frac{1}{2}\sqrt{(S\sqrt{4n^2+1}-1)}=1$ м. **315.** $\sqrt{\frac{m^2S}{n^2+n\sqrt{4m^2-n^2}}}=6,29$ м.

316. $\frac{1}{2R}\sqrt{\frac{S^2}{2}-2SR^2}=2$ ф. 7,75 д. **317a.** $\frac{5a}{4}\sqrt{4b^2-a^2}=60$ кв. см.

317b. $\frac{5a^2}{4}\left[\sqrt{3}+\sqrt{1+\frac{2}{3}\sqrt{5}}\right]=62,17$ кв. ф.

318. $\frac{5a}{2}\sqrt{H^2+a^2\cdot\frac{5+2\sqrt{5}}{20}}=1381,03$ кв. см. **319.** 12 кв. дцм.

320. $\frac{2S}{5a}=6$ ф.; $\sqrt{\left(\frac{2S}{5a}\right)^2-a^2\frac{5+2\sqrt{5}}{20}}=8,13$ ф. **321.** $\frac{5R}{8}\left[5\sqrt{3}-\sqrt{15}+\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right]=193,31$ кв. ф. **322.** $\sqrt{b^2+\frac{2S_6}{5}}-\sqrt{b^2-\frac{2S_6}{5}}=6$ дцм.; $H=5,1$ дцм. **323.** $\frac{3a}{2}(a\sqrt{3}+\sqrt{4H^2+3a^2})=$ $=40,09$ кв. см. **324.** $\frac{3a}{2}(a\sqrt{3}+\sqrt{4b^2-a^2})=238,17$ кв. см.

325. 2,87 дцм. **326.** 25,85 кв. м. **327.** $2\sqrt{3}(h\sqrt{h^2-H^2}+h^2-H^2)=478,2$ кв. ф. **328.** $2a\sqrt{4H^2+a^2(3+2\sqrt{2})}=156,75$ кв. см.

329. $\frac{5a}{2}\sqrt{4H^2+a^2(5+2\sqrt{5})}=210$ кв. дцм.

330. $\frac{5(b^2-H^2)}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}=114,8$ кв. см. **331.** $\frac{1}{4}(a\sqrt{4d^2-a^2}+b\sqrt{4d^2-b^2}+c\sqrt{4d^2-c^2})=67,14$ кв. дцм. **332.** $147\frac{1}{3}$ кв. ф.

Указаніе. Опредѣлить радіусъ вписанной въ тр-къ основанія окружности; черезъ ея центръ проходитъ высота пирамиды.

333. 396,96 кв. см. **334.** $\frac{1}{2}(a\sqrt{3a^2+4b^2}+b\sqrt{3b^2+4a^2}+2ab)=$ $=178,56$ кв. см. **335.** $\frac{1}{2}\sqrt{16a^2H^2+4a^2d^2-d^4}=315$ кв. вершк. (приблизит.) **336.** 85,34 кв. д. **337.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}(3+\sqrt{2})=68,66$ кв. д.

338. $\frac{1}{2}(bc+c\sqrt{a^2+b^2}+a\sqrt{b^2+c^2})=150$ кв. ф. **339.** $ab+\frac{a}{2}(a+\sqrt{a^2+2b^2})=26,1$ кв. см. **340.** $\frac{a^2}{8}(\sqrt{7}+8\sqrt{2}+2\sqrt{3})=34,76$ кв. см.

341. 47,79 кв. дцм. **342.** $\frac{1}{2}(b\sqrt{d_1^2+d_2^2}+\sqrt{2d_1^2d_2^2+b^2(d_1^2+d_2^2)})=$ $=37{,}21$ кв. ф. **343.** 80,61 кв. см. **Указаніе.** Для опредѣленія діагонали трапеціи воспользоваться теоремой Птоломея, а для опредѣленія отрѣзковъ, на которые діагонали дѣлятся точкой ихъ пересѣченія, разсмотрѣть подобные треугольники, основаніями которыхъ служатъ параллельныя стороны трапеціи, а боковыми — отрѣзки діагоналей. Далѣе легко опредѣлить боковыя ребра пирамиды и вычислить площади треугольниковъ, служащихъ боковыми гранями по тремъ сторонамъ. **344.** 506,71 кв. см. **345.** $a^3=125$ кб. см. **345а.** $\frac{p^3}{64}=$ $=27$ кб. д. **346.** $\frac{m^3}{1728}=8$ кб. дцм. **346а.** $S\sqrt{S}=549$ кв. вершк. **347.** $\frac{d^3\sqrt{2}}{4}=27$ кб. см. **347а.** $\frac{S\sqrt{S}}{36}=42{,}875$ кб. дюйм. **348.** $\frac{S\sqrt{2}}{2}\sqrt{\frac{S\sqrt{2}}{2}}=64$ кб. см. **349.** $a\sqrt[3]{2}=9{,}12$ см. **350.** $a\sqrt[3]{\frac{m}{n}}=7{,}21$ дцм. **351.** $\sqrt{S^3}:\sqrt{S_1^3}=8:27$. **352.** 125 кб. см.; 8 кб. см. **353.** $\left(\frac{S-m^2}{12m}\right)^3=15^5/_8$ кб. дцм. **354.** $6\sqrt[3]{V^2}=150$ кв. ф. **354а.** $\sqrt[3]{2}:\sqrt[3]{3}$. **355.** $\frac{ab+ac+bc}{3}\sqrt{\frac{ab+ac+bc}{3}}=195{,}34$ кб. метр. **356.** $\sqrt[3]{a^3+b^3+c^3}=6$ дцм., 216 кв. дцм. **357.** 2,5 фут. и 3,5 фут. **358.** $\sqrt{\frac{m}{3n}-\frac{n^2}{12}}+\frac{n}{2}=12$ фут.; $\sqrt{\frac{m}{3n}-\frac{n^2}{12}}-\frac{n}{2}=9$ фут. **359.** $3\sqrt{3}$. **360.** $a^2H=200$ кб. см. **361.** $aS_б=112$ кб. дюйм. **362.** $(aS-a^2)=$ $=4{,}704$ кб. фут. **363.** $K:K_1=7{,}29$. **364.** $\frac{2(a^3+2V)}{a}=$ $=157{,}5$ кв. дцм. **365.** $\frac{4V}{S_б}=3$ дюйм. **366.** $\sqrt{\left(\frac{S-S_б}{2}\right)^3}=$ $=64$ кб. арш. **367.** $\frac{4V+a^3}{a}=46$ кв. метр. **368.** $\frac{H}{2}(S+4H^2-H\sqrt{4H^2+2S})=$ $=3864$ кб. вершк. **369.** $\frac{d^2}{2}\sqrt{D^2-d^2}=150$ кб. см. **370.** 720 кб. см. или 300 кб. см. **371.** $abc=72$ кб. см. **372.** $\frac{V}{B}=10$ см.; $\frac{V}{B_1}=8$ см. и $\frac{BB_1}{V}=5$ см. **373.** $\sqrt{BB_1B_2}=60$ кб. дюйм.

374. $\sqrt{\frac{Vm^2}{np}}$; $\sqrt[3]{\frac{Vn^2}{mp}}$; $\sqrt{\frac{Vp^2}{mn}}$. **375.** $\frac{ab+bc+ac}{a_1b_1+b_1c_1+a_1c_1}$; $\frac{abc}{a_1b_1c_1}$. **376.** $\sqrt{a^2+b^2+\left(\frac{V}{ab}\right)^2}=12{,}85$ дюйм. **377.** $\frac{(S_б-2aH)a}{2}=$ $=240$ кб. дюйм. **378.** $\frac{2(VH+aV+a^2H^2)}{aH}=136{,}5$ кв. фут. **379.** $\frac{ab(S-2ab)}{2(a+b)}=72$ кб. см. **380.** $\frac{V}{B}$; $\frac{SB\pm\sqrt{S^2B^2-16V^2B}}{V}$; 7 дюйм.; 8 дюйм. и 9 дюйм. **381.** 12 дюйм.; 15 дюйм. и 10 дюйм. **382.** $mnp\sqrt{\frac{D^6}{(m^2+n^2+p^2)^3}}$. **383.** $\frac{D^3\sqrt{2}}{8}=62{,}5$ кб. дюйм. **384.** 30240 кб. см. **385.** 7056 кб. см. **386.** $\frac{mns\sqrt{s}}{m^2+n^2}=400$ кб. см. **387.** 12 : 1. **388.** $\frac{dH}{2}\sqrt{4a^2-d^2}=180$ кб. см. **389.** $\frac{8aV}{d\sqrt{4a^2-d^2}}=$ $=160$ кв. дцм. **390.** 1200 кб. фут. **391.** 16,34 см. и 19,42 см. **392.** 13 метр.; 10 метр. и 24 метр. **393.** $\frac{1}{2}\sqrt{2BB_1B_2}=135$ кб. дцм. **394.** $\frac{H}{2}\sqrt{(a+b+d)(a+b-d)(a+d-b)(b+d-a)}=2520$ кб. см. **395.** $V=\frac{S\sqrt{(a+b+d)(a+b-d)(a+d-b)(b+d-a)}}{4(a+b)}=4896$ кб. дм. **396.** $\frac{2(a+b)V}{B}=248$ кв. дюйм. **397.** $mn:mp:np$. **398.** $aQ=420$ кб. см. **399.** $\sqrt{(a^2+b^2)H^2\pm2H\sqrt{(abH+V)(abH-V)}}$; 239,2 кв. см.; 84 кв. см. **400.** $\frac{abS}{4(a+b)}=63$ кб. см. **401.** $\frac{3}{2}ab\sqrt{a^2-ab+b^2}=292{,}5$ кб. см. **402.** $\frac{a^2b}{2}=22{,}5$ кб. дюйм. **403.** $\frac{abc}{2}=140$ кб. см. **404.** $\frac{abc\sqrt{6}}{4}=$ $=396$ кб. дюйм. **405.** $\frac{abc\sqrt{2}}{4}=20$ кб. дцм. **406.** $\frac{abc\sqrt{6}}{4}=252$ кб. см. **407.** $V=\sqrt{a^2m^2n^2-[bc\sqrt{a^2-p^2}-a\sqrt{(b^2-m^2)(c^2-n^2)}]^2}$ кб. един. **408.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{2}=88{,}125$ кб. см. **409.** $\frac{abc\sqrt{2}}{2}=50{,}76$ кб. см. **410.** $\frac{a^2b}{2}$. **411.** $abc\sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{2}-1)}=1181{,}25$ кб. см. **412.** $\frac{a}{2}\sqrt{4b^2d^2-(c^2-b^2-a^2)^2}=$

$=480$ кб. фут. **413.** $\frac{ab\sqrt{a^2+b^2}}{2}=390$ кб. см. **414.** 4080 кб. арш.
415a. $\frac{a^2H\sqrt{3}}{4}=415{,}68$ кб. дцм. **415b.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$ кб. ед.
416. $\frac{S_{б}a\sqrt{3}}{12}=5{,}2$ кб. дюйм. **417.** $\frac{S-H(\sqrt{6S\sqrt{3}+27H^2}-3H\sqrt{3})}{2}\cdot H=$
$=421{,}2$ кб. см. **418.** $2\sqrt{3VH\sqrt{3}}=42\sqrt{30}=230{,}16$ кв. фут.
419. $\frac{(S-S_{б})S_{б}}{\sqrt{24(S-S_{б})\sqrt{3}}}=60$ кб. см. **420.** $\frac{4V\sqrt{3}}{S_{б}}=6$ дцм.;
$\frac{S_{б}^2\sqrt{3}}{36V}=9$ дцм. **421.** $\frac{k}{3}\sqrt{3k}=81$ кб. см.
422. $\frac{B}{3}\sqrt{3(d^2-4B\sqrt{3})}=1112{,}4$ кб. см. **423.** $\frac{bS_{б}\sqrt{4a^2-b^2}}{4(2a+b)}=672$ кб. см.
424. $\frac{4(2a+b)V+b^2\sqrt{4a^2-b^2}}{2b\sqrt{4a^2-b^2}}=516$ кв. дюйм. **425.** $\frac{bBS_{б}}{b^2+\sqrt{b^4+4B^2}}=$
$=120$ кб. дцм. **426.** 432 кб. метр. или 384 кб. метр.
427. $H\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=1512$ кб. см. **428.** 21 кб. дцм.
429. $\frac{2pV}{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}=59{,}4$ кв. дюйм., гдѣ $a+b+c=2p$.
430. 105 кб. метр. **431.** 13 см. и 14 см. **432.** 20 ф., 34 ф. и 42 ф. **433.** $\frac{a^2b}{4}\sqrt{25+10\sqrt{5}}=164{,}8$ кб. см. **434.** $\frac{3a^2b\sqrt{3}}{2}=$
$=46{,}71$ кб. фут. **435.** $2a^2b(1+\sqrt{2})=57{,}92$ кб. дюйм.
436. $2{,}5a^2b\sqrt{5+2\sqrt{5}}=12{,}24$ кб. метр. **437.** $B\sqrt{B}=$
$=27$ кб. см. **Указаніе.** Ввести въ вычисленіе радіусъ окружности, описанной около многоугольника основанія призмы.
438. 1) 198,13 кб. см. 2) 137,23 кб. метр. 3) 439,8 кб. ф. 4) 983,87 кб. дцм. 5) 109,97 кб. вершк. **439.** 1) 346,34 кб. см. 2) 95,89 кб. ф. 3) 149,46 кб. дюйм. 4) 939,9 кб. дцм. 5) 717,83 кб. арш. **440.** 1) 180 кб. ф. 2) 196 кб. см. 3) 96 кб. д. 4) 175 кв. метр. 5) 12605 кб. дцм. **441.** 1) 492,75 кб. см. 2) 117,79 кб. ф. 3) 2537,7 кб. д. 4) 1390,44 кб. дцм. 5) 1774,9 кб. арш. **442.** 1) 57354 кб. метр. 2) 869,37 кб. дцм. 3) 2878,8 кб. ф. 4) 685,07 кб. дюйм. 5) 556,4 кб. арш.
443. 1) $\frac{aS_{б}\sqrt{3}}{4}$ кб. ед. 2) $\frac{aS_{б}}{4}\sqrt{5+2\sqrt{5}}$ кб. ед.

3) $\frac{aS_{б}}{4}(2+\sqrt{3})$ кб. ед. **444.** $\sqrt[3]{\frac{2V\sqrt{3}}{9n}}=2{,}4$ см.; $\sqrt[3]{\frac{2n^2V\sqrt{3}}{9}}=$
$=6$ см. **445.** $\sqrt{\frac{2V}{3H\sqrt{3}}}=1{,}86$ д.; $2\sqrt{VH\sqrt{3}}+\frac{2V}{H}=29{,}16$ кв. дм.
446. $6{,}75a^3=54$ кб. метр. **447.** $4r^3\sqrt{2}=705$ кб. см.
448. 39230,625 кб. см. **449.** $\frac{3S_{б}{}^2\sqrt{3}}{50b}=91{,}34$ кб. см.
450. $2H^3\sqrt{3}=2250$ кб. см. **451.** $\frac{4V\sqrt{3}}{9}$ кб. ед.
452. $\frac{5Q}{2B}\sqrt{Q(5+2\sqrt{5})}$ лин. ед. **453.** $\frac{3a^2b}{8}=42$ кб. фут.
454. $\frac{a^3}{2}$13,5 кб. см. **455.** $\frac{\Delta l\sqrt{3}}{2}=1008$ кб. вершк., гдѣ Δ—площадь треугольника со сторонами a, b и c.
456. $\frac{\sqrt{(K+M+N)(K+M-N)(K+N-M)(M+N-K)}}{4a}=$
$=1134$ кб. см. **457.** $\frac{abc}{2}=168$ кб. см. **458.** $\frac{MN}{4a}=1000$ кб. дюйм.
459. $\frac{Ba}{2}=75$ кб. см. **Указаніе.** Дополнить призму до параллелепипеда съ основаніемъ B. **460.** 1646,4 кб. см.
461. 3360 кб. см. **462.** $\frac{ab}{8}\sqrt{12a^2-3b^2}=51{,}95$ кб. фут.
463. $\frac{3}{8}a^2=24$ кв. см. **464.** $\frac{a^2}{2}\sqrt{2c^2-b^2}=42{,}4$ кб. см.
465. $\frac{BH}{b}$ кв. ед. **466.** $\frac{ab\sqrt{2}}{2}=408{,}9$ кб. дюйм. **467.** $\frac{BH}{B-B_1}=$
$=15{,}6$ см. **468.** $\frac{add_1\sqrt{2}}{4}=150$ кб. см. **469.** 250 кб. дюйм.
470. $\frac{(a+c)bl}{2}=240$ кб. дюйм. **471.** $V:a=8$ кв. дцм.
472. $\frac{a^2H\sqrt{3}}{12}=166{,}24$ кб. см. **473.** $\frac{a^2}{12}\sqrt{3b^2-a^2}=4{,}35$ кб. дцм.
474. $\frac{a^2}{24}\sqrt{12h^2-a^2}=5{,}5$ кб. фут. **475.** $\frac{b^2-h^2}{3}\cdot\sqrt{4h^2-b^2}=17{,}68$ кб. см.
476. $\sqrt{\frac{3H^3+V\sqrt{3}}{3H}}=33{,}9$ дцм. **477.** $\frac{H\sqrt{3}}{4}(b^2-H^2)=166{,}24$ кб. см.

478. $\frac{a}{72}\sqrt{48S_б^2-9a^4}=4{,}97$ кб. дюйм. **479.** $\frac{S_б^2\sqrt{27h^4-S_б^2}}{81h^3}=$ $=141{,}52$ кб. фут. **480.** $\sqrt{\frac{48V^2}{a^4}+\frac{a^2}{3}}=7{,}2$ арш.; $\frac{3a}{2}\sqrt{\frac{48V^2}{a^4}+\frac{a^2}{12}}=$ $=49{,}32$ кв. арш. **481.** $\frac{H\sqrt{3}}{4}(b^2-H^2)=5{,}19$ кб. дюйм. **482.** 53,12 кб. арш. или 38,07 кб. арш. **483.** $\frac{2S_б}{9}\sqrt{S_б\sqrt{3}}=$ $=2{,}83$ кб. дм. **484.** 45 кв. см. **485.** $\frac{B}{3}\sqrt{b^2-\frac{4B}{3\sqrt{3}}}=124{,}56$ кб. см.

486. $\frac{a^3h_1^2\sqrt{3}}{8(9h^2-h_1^2)}=4{,}62$ кб. см. **487.** $H\sqrt{3}\left(\sqrt{\frac{H^4}{4}+\frac{S_б^2}{27}}-\frac{H^2}{2}\right)=$ $=650$ кб. см. **488.** $\frac{a^2H}{3}=21$ кб. см. **489.** $\frac{a^2}{3}\sqrt{b^2-\frac{a^2}{2}}=21{,}99$ кб. дюйм.

490. $\frac{1}{a}\sqrt{36V^2+a^6}=320$ кв. см. **491.** $\frac{2H}{3}(b^2-H^2)=72$ кб. см.

492. $\frac{a}{6}\sqrt{S(S-2a^2)}=190{,}44$ кб. см. **493.** $\frac{H}{3}(\sqrt{S_б^2+4H^4}-2H^2)=$ $=90{,}99$ кб. см. **494.** $\frac{a^2}{6}\sqrt{4h^2-a^2}=48$ кб. дцм.

495. $\frac{4(b^2-h^2)}{3}\sqrt{2h^2-b^2}=54{,}87$ кб. см. **496.** $\frac{S_б^2}{48h^3}\sqrt{16h^4-S^2}=$ $=384$ кб. см. **497.** $\frac{1}{H}\sqrt{3V(4H^3+3V)}=135$ кв. см.

498. $(2b^2-\sqrt{4b^4-S_б^2})\sqrt[4]{b^4-\frac{S_б^2}{4}}=144$ кв. см. **499.** $\frac{aQ\sqrt{2}}{3}=$ $=48$ кб. дцм. **500.** $\frac{a^2H}{12}\sqrt{25+10\sqrt{5}}=114{,}74$ кб. дцм.

501. $\frac{a^2H}{12}\sqrt{25+10\sqrt{5}}=45{,}89$ кб. см. **502.** 293,65 кб. арш.

503. $2\sqrt{\frac{3V\sqrt{5-2\sqrt{5}}}{5H}}$ лин. ед. **504.** $\frac{a^2}{2}\sqrt{3(b^2-a^2)}=271{,}45$ кб. см.

505. $2(b^2-H^2)\sqrt{12H^2-9b^2}=719$ кб. см. **506.** 2,82 см.

507. $\frac{a}{12}\sqrt{12S_б^2-81a^4}=249{,}41$ кв. дюйм. **508.** $\frac{1}{2a}\sqrt{48V^2+27a^6}=$ $=249{,}69$ кв. фут. **509.** $\frac{a}{4}\sqrt{16Q^2-3a^4}=299{,}78$ кб. дм.

510. $\frac{2H^3\sqrt{3}}{9}=10{,}39$ кб. см. **511.** $\frac{2a^2H}{3}(1+\sqrt{2})=257{,}07$ кб. фут.

512. $\frac{5a^2H}{6}\sqrt{5+2\sqrt{5}}=184{,}2$ кб. см. **513.** $\frac{abc\sqrt{3}}{36}=3{,}04$ кб. см. **Указаніе.** Воспользоваться выраженіемъ радіуса окружности, описанной около треугольника основанія пирамиды, т.-е. формулой $R=\frac{abc}{4\Delta}$. **514.** $\frac{B}{3}\sqrt{b^2-2B}=20{,}34$ кб. фут. **515.** $\frac{aH}{3}\sqrt{4c^2-H^2-a^2}=$ $=24$ кб. фут. **516.** $\frac{ab}{6}\sqrt{4c^2-a^2-b^2}=69{,}8$ кб. м. **517.** 1512 кб. см.

518. $\frac{Q}{2H}\sqrt{(aH+Q)(aH-Q)}=80$ кб. дцм.

519. $\frac{(a+c)Q}{6\sqrt{ac+b^2}}\sqrt{4b^2-(a-c)^2}=16^2/_3$ кб. дюйм. **520.** $\frac{H}{6}(ab+cd)=$ $=8820$ кб. см. **521.** 1560 кб. см. **522.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}=62{,}34$ кб. фут.

523. $\sqrt[3]{6V(2+\sqrt{2})}=9{,}03$ дцм. **Указаніе.** Высота проходитъ черезъ центръ окружности, вписанной въ треугольникъ основанія. При рѣшеніи воспользоваться формулой $r=\frac{\Delta}{p}$ и имѣть въ виду, что высота тр-ка равна r. **524.** $\frac{b}{48}\sqrt{(4a^2-b^2)(16c^2-4a^2+b^2)}=48$ кб. см.

525. 638,375 кб. дцм. **526.** $\frac{4H^3\sqrt{3}}{9}=166{,}08$ кб. дюйм.

527. $\sqrt{h^2-\frac{(a-a_1)^2}{12}}=2{,}95$ фут. **528.** $\frac{2pa}{a+a_1}=28$ см.; $\frac{2pa_1}{a+a_1}=16$ см.

529. $\frac{1}{2}\sqrt{2b^2-\frac{(a-a_1)^2}{2}}=2$ см. **530.** $\frac{b}{2}(p+p')=58{,}5$ кв. см.

531. $a_1\sqrt{H^2+\frac{(a-a_1)^2}{3}}=4\sqrt{3}$ см. **532.** $\sqrt{B\sqrt{3}}-\frac{p'\sqrt{3}}{3}=2\sqrt{3}$ дцм.

533. $5\sqrt{6}-5=7{,}25$ см. **Указаніе.** Разсмотрѣть проекцію меньшаго основанія на большее. Вычислить соотвѣтствующіе отрѣзки высоты тр-ка основанія. Изъ подобія треугольниковъ слѣдуетъ взять отношеніе сторонъ основаній къ радіусамъ описанныхъ около основаній окружностей. **534.** 12 см. **535.** $2H-a\sqrt{2}=2\sqrt{2}$ дюйм.

536. $\frac{a+a_1}{2}\sqrt{H^2+\frac{(a+a_1)^2}{4}}=20$ кв. фут. **537.** $\frac{Q}{H}\pm\sqrt{h^2-H^2}$;

10 д. и 4 д. **538.** $\frac{3(a+a_1)}{2}\sqrt{H^2+\frac{(a-a_1)^2}{12}}=68{,}49$ кв. см.

539. $\frac{3(a+a_1)}{4}\sqrt{4b^2-(a-a_1)^2}=38{,}93$ кв. см.

540. $\frac{1}{6(a+a_1)}\sqrt{16S_б{}^2-3(a^2-a_1{}^2)^2}=3{,}47$ дюйм. **541.** $nh\cdot\frac{a+a_1}{2}$ кв.ед.

542. $(a+a_1)\sqrt{4H^2+(a-a_1)^2}=95{,}26$ кв. см. **543.** $\frac{S}{2h}-a=1$ дюйм.; $\sqrt{h^2-\left(a-\frac{S_б}{4h}\right)}=5{,}92$ дюйм. **544.** 1842,5 кв. дцм.

545. $\sqrt{\frac{2(S-S_б)\sqrt{3}}{9}-a^2}=2{,}87$ фут.; $\frac{1}{6(a+a_1)}\sqrt{4S_б{}^2-27(a^2-a_1{}^2)^2}=$ $=5{,}75$ фут. **546.** $\frac{\sqrt{3}}{4}(a^2+a_1{}^2)+{}^3/_4(a^2-a_1{}^2)=37{,}49$ кв. см.

547. $\frac{\sqrt{3}}{4}(4a^2+a_1{}^2)=29{,}44$ кв. дцм. **548.** $\frac{3(2m+n)an}{4(m+n)^2}\sqrt{4b^2-a^2}=$ $=120{,}96$ кв. см. **549.** $\frac{3(H^2-m^2)a}{2Hm}\sqrt{H^2-\frac{a^2}{12}}=1657{,}83$ кв. фут.

550. 59,92 кв. см. **551.** $\sqrt{\frac{(4h^2-3a^2)(3ah-S_б)}{12ah}}=4{,}62$ см.

552. $\frac{B+B_1+\sqrt{BB_1}}{4}=30{,}5$ кв. дюйм. **Указаніе.** Ввести въ вычисленіе сходственныя стороны верхняго и нижняго основаній x и y, и сходственную сторону средняго сѣченія z. Воспользоваться зависимостью, по которой $\frac{x+y}{2}=z$. **553.** $\frac{n}{2}\sqrt{2(a^2+a_1{}^2)}$ лин. ед.

554. $H\sqrt{\frac{m}{m+n+p}}=6{,}93$ д.; $H\sqrt{\frac{m+n}{m+n+p}}=8{,}94$ д.

555. $H\frac{\sqrt{3}}{12}(a^2+aa_1+a_1{}^2)=10{,}68$ кб. фут. **556.** $\frac{3V}{B+B_1+\sqrt{BB_1}}=6$ см.

557. $\frac{a^2+aa_1+a_1{}^2}{12}\sqrt{3b^2-(a-a_1)^2}=349{,}76$ кб. фут.

558. $\frac{6V-BH}{2H}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3B}{H}(4V-BH)}=18$ кв. дюйм.

559. $\frac{a^2+aa_1+a_1{}^2}{12}\sqrt{3h^2-\frac{(a-a_1)^2}{4}}=62{,}27$ кб. дцм. **560.** 2,43 кб. дм.

561. 18 кв. см. и 50 кв. см. **562.** $\frac{a^2+aa_1+a_1{}^2}{2}\sqrt{b^2-\frac{(a-a_1)^2}{2}}=$ $=147{,}06$ кв. фут. **563.** $\frac{a^2+aa_1+a_1{}^2}{6(a+a_1)}\sqrt{S_б{}^2-(a^2-a_1{}^2)^2}=$ $=1618{,}95$ кб. см. **564.** $\frac{4V\sqrt{3}}{a^2+aa_1+a_1{}^2}=4{,}33$ дцм. $S_б=41{,}08$ кв. дцм.;

565. 130 кв. дцм. **566.** $2(a+a_1)\sqrt{\frac{9V^2}{a^2-aa_1+a_1{}^2}+\frac{(a-a_1)^2}{4}}=$ $=45$ кв. см.. **567.** 1,5 дцм. **568.** 38,75 кб. фут.

569. $\frac{BH}{3}\left(1+\frac{n}{m}+\frac{n^2}{m^2}\right)=92{,}5$ кб. дюйм.

570. $\frac{a^2+aa_1+a_1{}^2}{3}\sqrt{h^2-\frac{(a-a_1)^2}{4}}=159{,}44$ кб. см.

571. $\frac{\sqrt{3}}{2}(a^2+aa_1+a_1{}^2)\sqrt{b^2-(a-a_1)^2}=3311{,}22$ кб. дюйм.

572. $B:B_1:\sqrt{BB_1}=9:25:15$. **573.** $256\sqrt{3}$ кб. дюйм.

574. $\frac{a^2\sqrt{3}}{12(a+a_1)}(a^2+aa_1+a_1{}^2)=\frac{a^2\sqrt{3}(a^3-a_1{}^3)}{12(a^2-a_1{}^2)}=39{,}49$ кб. см.

575. $\frac{Q(a^2+aa_1+a_1{}^2)\sqrt{2}}{3(a+a_1)}=74$ кб. см. **576.** $\frac{7a^2b^2\sqrt{2}}{9(a+b+\sqrt{a^2+b^2})}=$ $14\sqrt{2}$ кб. см. **Указаніе.** Высота проходитъ черезъ центръ окружности, вписанной въ треугольникъ основанія. Для опредѣленія радіуса этой окружности воспользоваться формулой $\Delta=pr$.

577. $\frac{\sqrt[3]{4}}{4}\sqrt{4c^2-a^2-b^2}=6{,}55$ фут. **578.** $\frac{H\sqrt[3]{4}}{2}=3{,}17$ арш.

579. $(B+\sqrt{BB_1}+B_1)\left(1-\sqrt{\frac{B_1}{B}}\right)\frac{H}{3}=214{,}6$ кб. дцм.

580. $\sqrt{\frac{12vH^2-Bm^3}{12Bm}}-\frac{m}{2}=1{,}08$ дцм. **581.** $3\sqrt[3]{9}$ см.; $3\sqrt[3]{9}(\sqrt[3]{2}-1)$ см.

582. $\frac{B_1H\sqrt{B_1}}{3(\sqrt{B}-\sqrt{B_1})}=45$ кб. см. **583.** $\frac{1}{9}(\sqrt{B}+2\sqrt{B_1})^2=11\frac{1}{9}$ кв. ф.; $\frac{1}{9}(\sqrt{B_1}+2\sqrt{B})^2=32\frac{1}{9}$ кв. фут. **584.** $\frac{B}{3}(l+m+n)=62$ кб. дюйм.

585. $\frac{a^2\sqrt{3}}{12}(b+c+d)=129{,}84$ кб. см. **586.** $\frac{(l+m+n)\Delta}{3}=60$ кб. дюйм..

гдѣ Δ—площ. тр-ка со сторонами a, b и c. **587.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{8}(2H-a)=$ $=8{,}66$ кб. см. **588.** $\frac{a^2\sqrt{6}}{24}(b+c+d)=22{,}04$ кб. дцм. **589.** $\frac{d_1d_2(b+c)}{4}=$ $=147$ кб. фут. **590.** $\frac{ab^3\sqrt{3}}{2}=2660{,}34$ кб. дцм. **591.** $\frac{Qm}{2}=35$ кб. фут.

592. $\frac{3a^2}{2}=6$ кв. дюйм. **593.** $4\sqrt{2}:3$. **594.** $\frac{aH}{a+H\sqrt{2}}=2{,}39$ см.

595. $\frac{a^2H^2(16+\sqrt{3})}{4(a+H)^2}=17{,}73$ кв. см.; $\frac{a^3H^3\sqrt{3}}{4(a+H)^3}=3{,}46$ кб. см. **Указаніе.** Обозначивъ сторону основанія призмы черезъ x, воспользоваться теоремой: площ. параллел. сѣченій пирамиды относятся, какъ квадраты ихъ разстояній отъ вершины пирамиды. **596.** $\frac{a^2H\sqrt{3}}{108}=4$ кб. дюйм.

597. $\frac{a^2H\sqrt{3}}{32}=6{,}99$ кб. дцм. **598.** $\frac{2a^2H}{3}=96$ кб. арш.

599. $\frac{BH}{12}=8$ кб. фут. **600.** $a^2(3+\sqrt{3})=170{,}35$ дцм.; $\frac{5a^3}{6}=$ $=180$ кб. дцм. **601.** $\frac{7}{3}a^3(\sqrt{2}-1)=23{,}08$ кб. см.; $2a^2[6(\sqrt{2}-1)+3\sqrt{3}-2\sqrt{6}]=68{,}26$ кв. см. **602.** $4a\sqrt{2H^2+a^2}=$ $=300$ кв. дцм. **603.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{54}=2{,}83$ кб. дцм. **604.** $\sqrt{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}=$ $=12{,}49$ кв. дцм.; $\frac{abc}{6}=20$ кб. дцм. **605.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}=3{,}46$ фут.

606. $\frac{BH}{4}=24$ кб. дюйм. **607.** $H\sqrt{\frac{B_1}{B}}=4$ дцм. **608.** $\frac{p\sqrt{m}}{\sqrt{m}+\sqrt{n}}=4$ см.; $\frac{p\sqrt{n}}{\sqrt{m}+\sqrt{n}}=6$ см. **609.** $\frac{m^2S}{m^2-n^2}=50$ кв. дцм.; $\frac{n^2S}{m^2-n^2}=18$ кв. дцм.

610. $\frac{VS_1}{S}\sqrt{\frac{S_1}{S}}=27$ кб. дюйм. **611.** $H\sqrt{\frac{V_1}{V}}=3$ фут. **612.** $\frac{a_1^3V}{a^3}=$ $=16$ кб. дюйм. **613.** 24 дюйм.; 32 дюйм. и 42 дюйм. **614.** $\frac{H^2}{h}=$ $=6{,}25$ дцм.; $\frac{h^2}{H}=3{,}2$ дцм. **615.** $\frac{2Bh^3}{b^2}=48$ кб. фут. **616.** $\frac{H^4\sqrt{3}}{12a}=$ $=36$ кб. см. **617.** $\sqrt{\frac{B}{B_1}}=4:3$. **618.** $a^2\sqrt{3}$ кв. ед.; $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$ кб. ед.

619. $\frac{a^2\sqrt{2}}{4}$ кв. ед. **620.** $\frac{a\sqrt{2}}{4}$ лин. ед. **621.** $\frac{a\sqrt{6}}{4}$ лин. ед.

622. $\frac{1}{6}\sqrt[4]{12Q^2}$ лин. ед. **Указаніе.** Точка лежитъ въ плоскости, проходящей черезъ ребро тетраэдра и средину противоположной грани. Она находится въ точкѣ пересѣченія высотъ образовавшагося тр-ка.

623. $\frac{a^3\sqrt{2}}{54}$ кб. един. **624.** $2a^2\sqrt{3}$ кв. ед.; $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$ кб. ед. **625.** $d^2\sqrt{3}$ кв. ед.

626. $a\sqrt{2}$. **627.** $\frac{a\sqrt{6}}{6}$. **628.** $m\sqrt{3}$ лин. ед. **629.** $\frac{3a^2\sqrt{3}}{8}$ кв. ед.

630. $2a^3(10-7\sqrt{2})=2471$ кб. см. **631.** $\frac{2a^3\sqrt{3}}{27}$ кб. ед.

632. $\frac{a^2}{2}(3+\sqrt{3})=42{,}57$ кв. дцм.; $\frac{5\sqrt{2a^3}}{24}=22{,}5$ кб. дцм.

633. $\frac{2a^2}{3}(1+2\sqrt{3})$; $\frac{8a^3\sqrt{2}}{27}$. **634.** $5a^2\sqrt{3}$ кв. ед.; $\frac{5a^3}{12}(3+\sqrt{5})$ кб. ед.

635. $\frac{a}{2}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$. **636.** $\frac{a\sqrt{3}}{12}(3+\sqrt{5})$. **637.** $3a^2\sqrt{5(5+2\sqrt{5})}$ кв. ед. $\frac{a^3}{4}(15+7\sqrt{5})$ кб. ед. **638.** $\frac{a}{2}(\sqrt{15}+\sqrt{3})$ **639.** $\frac{a}{2}\sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{10}}$.

640. $2\pi rH=94{,}2$[illegible] кв. см.; $2\pi r(H+r)=150{,}72$ кв. см.

641. $\frac{S}{2\pi r}-r=4$ см. **642.** $\sqrt{\frac{S}{2\pi}+\frac{H^2}{2}}-\frac{H}{2}=2$ дцм. **643.** $\frac{S_б}{2\pi H}=5$ дцм.

644. $\frac{S_б}{2\pi r}=3$ фут. **645.** $\frac{S_б}{\sqrt{2\pi(S-S_б)}}=9$ см. **646.** $\frac{2\pi n(n-m)H^2}{m^2}=$ $=168\pi$ кв. см. **647.** $1:2$. **648.** $\pi^2r^2=39{,}44$ кв. дцм.

649. $\pi r^2H=62{,}82$ кб. см. **650.** $\left(\frac{S}{2}-\pi r^2\right)r=37{,}13$ кб. арш.

651. $\frac{S_б^2}{4\pi H}=27{,}39$ кб. дцм. **652.** $\frac{2V}{r}=29$ кв. дюйм. **653.** $2\sqrt{\pi VH}=$ $=142{,}33$ кв. см. **654.** $\frac{S_б^2}{4\pi H}=8\pi=25{,}12$ кб. дюйм. **655.** $20\pi=$ $=62{,}82$ кб. см. **656.** $\frac{rS}{2}=55$ кб. дм. **657.** $3\sqrt[3]{2\pi V^2}=204{,}78$ кв. фут.

658. $S_б+\frac{8\pi V^2}{S_б^2}=54\pi=169{,}56$ кв. см.; $\frac{S_б^2}{4\pi V}=6$ см.

659. $\frac{S_б}{2}\sqrt{\frac{S-S_б}{2\pi}}=72\pi=226,08$ кб. дюйм. **660.** $2\sqrt[3]{\frac{\pi m V^2}{n}}=$ $=378\pi=1187,3$ кв. фут. **661.** 288π кб. см. **662.** $1:\pi=0,32$.
663. $\pi Q=25\pi$ кв. см.; $\frac{B}{2}\sqrt{\pi Q}=25\sqrt{\pi}$ кб. см. **664.** $\frac{Q}{2}\sqrt{3}=$ $=12$ кв. дюйм. **665.** $\frac{1}{2H}\sqrt{4H^2r^2-Q^2}=2$ см. **666.** 6 см. и 5 см.; или 8 см. и $3\sqrt{2}$ см. **667.** $\frac{4}{3}\pi r(r+H)+rH\sqrt{3}=131,69$ кв. см.; $\frac{2}{3}\pi r(r+H)+rH\sqrt{3}=81,43$ кв. см. **668.** $\frac{2}{9}\pi r(r+H)+4rH=$ $=410,51$ кв. см. **669.** $2\pi r(m+r)=48\pi$ кв. см.; $\pi r^2(m+r)=$ $=72\pi$ кб. см. **670.** $\frac{2\pi aH\sqrt{3}}{3}=37,6\pi$ кв. см. **671.** $\frac{\pi a^2b^2c^2H}{16\Delta^2}=$ $=5198,46$ кб. см., гдѣ Δ—площ. тр-ка (a, b, c). **672.** $\frac{\pi aH\sqrt{3}}{3}=$ $=17,93$ кв. см.; $\frac{\pi a^2H}{12}=5,24$ кб. см. **673.** $\frac{3\pi a^2}{2}=42,39$ кв. дюйм.
674. $\frac{\pi a^3}{2}=12,56$ кб. см. **675.** $rH\sqrt{2}=16$ кв. см. **676.** $\pi aH=$ $=8\pi$ кв. дцм.; $\frac{\pi a^2H}{4}=16\pi$ кб. дцм. **677.** $\pi H\sqrt{a^2+b^2}+\frac{\pi}{2}(a^2+b^2)=$ $=47,5\pi$ кв. см.; $\frac{\pi(a^2+b^2)H}{4}=43,75\pi$ кб. см. **678.** 1) $\pi aH\sqrt{3}$ кв. ед. $\frac{3\pi a^2H}{4}$ кб. ед.; 2) $\pi aH(1+\sqrt{5})$ кв. ед.; $\frac{\pi a^2H}{2}(3+\sqrt{5})$ кб. ед.
679. 1) $2\pi aH$ кв. ед.; πa^2H кб. ед.; 2) $\pi aH(1+\sqrt{5})$ кв. ед. $\frac{\pi a^2H}{2}(3+\sqrt{5})$ кб. ед. **680.** $\frac{S_б}{2}\sqrt{\frac{V}{\pi H}}=22,34$ кб. см. **681.** $\frac{a^2b}{4\pi}=$ $=6,37$ кб. см. или $\frac{ab^2}{4\pi}=7,94$ кб. см. **682.** 175 кб. дцм.
683. $2a(1+\pi)=24,85$ кв. см. **684.** $\pi r=6,28$ фут.
685. $\sqrt{\frac{S^4}{16\pi^3V^2}+\frac{16\pi^2V^2}{S^2}}=5$ дцм. **686.** $\pi r(r+l)=43,96$ кв. дцм.
687. $\pi r\sqrt{r^2+H^2}=188,46$ кв. см. **688.** $\pi l\sqrt{l^2-H^2}=47,12$ кв. см.
689. $\sqrt{\frac{S_б^2}{\pi^2r^2}-r^2}=12$ дцм. **690.** $\sqrt{\frac{S}{\pi}+\frac{l^2}{4}}-\frac{l}{2}=5$ см.

691. $\frac{2\pi H^2}{3}=18,84$ кв. фут. **692.** 26 см. и 24 см. **693.** 2:3.
694. $\frac{\pi r^2H}{3}=1005,12$ кб. дюйм. **695.** $30\pi=94,23$ кб. фут.
696. $\pi r\left(r+\sqrt{r^2+\frac{9V^4}{\pi^2r^4}}\right)=366,66$ кв. дюйм. **697.** $\frac{\pi r^2}{3}\sqrt{l^2-r^2}=$ $=37,68$ кб. ф. **698.** $12\pi=37,68$ кб. дюйм. **699.** 75π кб. фут.
700. $\frac{r}{3}\sqrt{S(S-2\pi r^2)}=314,15$ кб. метр. **701.** $\sqrt[3]{\frac{V\sqrt{3}}{\pi}}=5,22$ дюйм.; $\sqrt[3]{\frac{9V}{\pi}}=9$ дюйм. **702.** $\sqrt{\frac{B^3+9\pi V^2}{B}}$ кв. ед.
703. $\sqrt[3]{\frac{3V\sqrt{n^2-m^2}}{\pi m}}$ лин. ед. **704.** 1:4. **Указаніе.** Ввести въ вычисленіе ребро пирамиды. **705.** $\frac{\pi a}{12}\sqrt{12H^2+a^2}=6,11\pi$ кв. см.; $\frac{\pi a^2H}{36}=1,75\pi$ кб. см. **706.** $\frac{\pi a}{3}\sqrt{a^2+3H^2}=30\pi$ кв. дюйм.; $\frac{\pi a^2H}{9}=$ $=32$ кб. дюйм. **707.** $4r\sqrt{r^2+H^2}=60$ кв. дюйм.
708. $\frac{\pi a^2}{2}\sqrt{a^2+2H^2}=14,68\pi$ кв. фут.; $\frac{\pi a^2H}{6}=3^1/_3\pi$ кб. фут.
709. 1) $\frac{\pi a}{4}\sqrt{9a^2+12H^2}$ кв. ед.; $\frac{\pi a^2H}{4}$ кб. ед.;
2) $\frac{\pi a}{4}\sqrt{5(9+4\sqrt{5})a^2+4(5+2\sqrt{5})H^2}$ кв. ед.; $\frac{\pi a^2H(5+2\sqrt{5})}{4}$ кб. ед.
710. 1) $\pi a\sqrt{a^2+H^2}$ кв. ед.; $\frac{\pi a^2H}{3}$ кб. ед.;
2) $\pi a\sqrt{^1/_2[(3+\sqrt{5})H^2+(7+3\sqrt{5})a^2]}$ кв. ед.; $\frac{\pi a^2H(3+\sqrt{5})}{6}$ кб. ед.
711. $\pi l(r+r_1)+\pi(r^2+r_1^2)=47\pi$ кв. см. **712.** $\pi(r+r_1)\sqrt{H^2+(r-r_1)^2}=$ $=110$ кв. см. **713.** $\frac{\sqrt{\pi(S_б+B-B_1)(S_б-B+B_1)}}{\pi(\sqrt{B}+\sqrt{B_1})}=0,46$ см.
714. 2 см.; 0,5 см. **715.** 10 см. и 4 см. **716.** 10 см. и 6 см.
717. $\frac{\pi}{9}(3H^2+p^2+p\sqrt{p^2-3H^2})=25\pi=78,55$ кв. дцм.
718. 2,55 кв. дюйм. **719.** 753,62 кв. мет. **720.** $\pi(r+r_1)\sqrt{d^2-4rr_1}=$ $=1009,46$ кв. см. **721.** $\frac{\pi H}{3}(r^2+r_1^2+rr_1)=153,86$ кб. см.

722. 6 см. **723.** $\frac{26\pi\sqrt{3}}{3}=47,09$ кб. см. **724.** $\frac{3V\sqrt{B}}{B\sqrt{B}-B\sqrt{B_1}}=$ $=10,5$ дюйм. **725.** $\frac{\pi\sqrt{l^2-(r-r_1)^2}}{3}(r^2+r_1^2+rr_1)=200,99$ кб. дцм.
726. $\frac{\pi}{3}(r^2+r_1^2+rr_1)\sqrt{(l+r-r_1)(l-r+r_1)}=24\pi\sqrt{6}$ кб. см.
727. $1172,5\pi$ кб. см.
728. 110π кб. см. **729.** $\frac{3(r+r_1)V}{(r^2+r_1^2+rr_1)}=180\pi$ кв. д.
730. $\frac{\pi(r^2+r_1^2+rr_1)}{6d}[(r-r_1)^2-d^2]=24,5\pi$ кб. см. **731.** 2 ф. и 5 ф.
732. $\frac{\pi(a+a_1)}{12}\sqrt{12H^2+(a-a_1)^2}=34,67\pi$ кв. см.; $\frac{\pi H}{36}(a^2+aa_1+a_1^2)=$ $=25^1/_3\pi$ кб. см. **733.** $\frac{\pi(a+a_1)}{3}\sqrt{3H^2+(a-a_1)^2}=12\pi$ кв. дцм.; $\frac{\pi H}{9}(a^2+a_1^2+aa_1)=21^7/_9\pi$ кб. дцм. **734.** 1) $\frac{\pi(a+a_1)}{4}\sqrt{4H^2+(a-a_1)^2}$ кв. ед.; $\frac{\pi H}{12}(a^2+aa_1+a_1^2)$ кб. ед. 2) $\frac{\pi(a+a_1)}{2}\sqrt{2H^2+(a-a_1)^2}$ кв. ед.; $\frac{\pi H}{6}(a^2+aa_1+a_1^2)$ кб. ед. **735.** 1) $\frac{\pi(a+a_1)}{4}\sqrt{12H^2+9(a-a_1)^2}$ кв. ед.; $\frac{\pi H}{4}(a^2+aa_1+a_1^2)$ кб. ед. 2) $\pi(a+a_1)\sqrt{H^2+(a-a_1)^2}$ кв. ед.; $\frac{\pi H}{3}(a^2+aa_1+a_1^2)$ кв. ед. **736a.** 180°. **736b.** 180°. **737.** 80°.
738. $\pi r^3\sqrt{15}=97,34$ кб. дюйм. **739.** $\frac{S_6}{30}\sqrt{\frac{9,9S_6}{\pi}}=3,27$ кб. фут.
740. $\frac{\pi n^2H^3}{3(360+n)(360-n)}$ кб. ед. **741.** $\frac{\pi n^2r^3}{3\,.\,360^3}\sqrt{(360+n)(360-n)}$ кб. ед.
742. 135°. **743.** $\frac{\pi\Delta\sqrt[4]{27\Delta^2}}{9}=6,84\pi$ кб. дюйм. **744.** $\frac{Q\sqrt{\pi B}}{3}=$ $=36\pi$ кб. дюйм. **745.** $\pi r\left(r+\sqrt{r^2+\frac{Q^2}{r^2}}\right)=62,8$ кв. см.; $\frac{\pi rQ}{3}=$ $=25,12$ кб. см. **746.** 28 кв. см. **747.** $(20\pi^2+36\pi\sqrt{3}+27):(4\pi^2-27)$.
748. $\frac{H}{2}\sqrt{2}=4$ см. **749.** $\frac{\pi r^2}{4}=12,56$ кв. см. **750.** $\frac{4Ql}{3\pi}=46$ кб. см.
751. $\frac{\pi r^2}{\sqrt[3]{4}}=18,12$ кв. фут. **752.** $\frac{3V(H-m)^2}{H^3}=54$ кв. см. **753.** $H\sqrt[3]{\frac{m}{m+n}}=$

$=4,35$ фут. **754.** $\frac{\pi(r+r_1)}{2}\sqrt{H^2+(r-r_1)^2}=157,05$ кв. см. **755.** 1 : 3.
756. 7 дцм. **757.** $2\pi r(H+r\sqrt{2})=174,89$ кв. дцм.; $\frac{\pi r^2}{3}(3H+2r)=$ $=197,82$ кб. дцм. **758.** $\pi r^2\left(4+\frac{\sqrt{5}}{4}\right)=\pi(16+\sqrt{5})=57,27$ кв. дюйм.
759. $\frac{r(\sqrt{3}-1)}{2}=1$ дцм. **760.** 4 см. **Указаніе.** Ввести въ вычисленіе общую высоту тѣлъ. **761.** 8 см. **762.** $\frac{\sqrt{6n(4m-n)}-2n}{4n}=1,53$.
763. $\frac{rr_1}{r+r_1}=2,1$ см. **764.** 2789,72 кв. см.; 10555,7 кб. см.
765. $8\pi(2+\sqrt{2})=85,66$ кв. см.; $\frac{44\pi}{3}=46,07$ кб. см. **766.** $m:n=$ $=3:5$. **767.** $\sqrt{m}:\sqrt{n}=2:3$. **768.** $\pi H\sqrt{\frac{2}{\pi}\sqrt{\pi^2H^2+4S_6^2}-2H^2}=$ $=480\pi$ кв. дюйм. **769.** $\sqrt[3]{2}:\sqrt[3]{3}$. **770.** $3:\sqrt{6}$. **771.** $r:H=1:2$.
772. $\frac{3Vm}{\pi r^2(m+n)}=6$ см.; $\frac{3Vn}{\pi r^2(m+n)}=7,5$ см. **773.** $2\pi d^2=72\pi$ кв. см.; $\frac{\pi d^3\sqrt{2}}{4}=54\pi\sqrt{2}$ кб. см. **774.** $2\pi b(a+b)=432\pi$ кв. дцм.; $\pi ab^2=$ $=2025\pi$ кб. дцм. **775.** 3 д. и 5 д. **776.** $\pi p(p-\sqrt{2d^2-p^2})=224\pi$ кв. см.; $\frac{\pi(p^2-d^2)}{4}(p-\sqrt{2d^2-p^2})=384\pi$ кб. см. **777.** $\pi ab(b+2m)=4752\pi$ кб. см.; $2\pi(a+b)(b+2m)=1320\pi$ кв. см. **778.** $S=90\pi$ кв. ф. и $V=100\pi$ кб. ф. или $S=300\pi$ кв. ф. и $V=240\pi$ кб. ф. **779.** $\pi a^2\sqrt{3}=21,33$ кв. д.; $\frac{\pi a^3}{4}=6,18$ кб. д. **780.** $\frac{\pi a^2b^2(a+b)}{\sqrt{a^2+b^2}}=67,2\pi$ кв. см.; $\frac{\pi a^2b^2\sqrt{a^2+b^2}}{3(a^2+b^2)}=$ $=76,8\pi$ кб. см. **781.** $\frac{2\pi(b+c)\Delta}{a}=11869,2$ кв. см.; $\frac{4}{3}\pi\Delta^2=$ $=28486,08$ кб. см., гдѣ Δ — площ. тр-ка со сторонами a, b и c.
782. $S=62,4\pi$ кв. см.; $V=38,4\pi$ кб. см. **Указаніе.** Данный равнобедренный треугольникъ — тупоугольный. **783.** $S=378,45\pi$ кв. д.; $V=200,64\pi$ кб. д. **784.** $\pi a(2b+\sqrt{a^2+b^2}+a)=420\pi$ кв. ф.; $\frac{2\pi a^2b}{3}=480\pi$ кб. фут. **785.** $\frac{\pi ab}{\sqrt{a^2+b^2}}(a+b+\sqrt{a^2+b^2})=$

$=28{,}8\pi$ кв. дцм.; $\frac{2\pi a^2b^2\sqrt{a^2+b^2}}{3(a^2+b^2)}=19{,}2\pi$ кб. дцм. **786.** $S=108\pi$ кв. см.; $V=80\pi$ кб. см. **Указаніе.** Данный треугольникъ тупоугольный. **787.** $2\pi(a+b)h_a=108\pi$ кв. см.; $\pi a h_a^2=108\pi$ кб. см. **788.** $2\pi a^2\sqrt{3}=$ $=96{,}65$ кв. д.; $\pi a^3=84{,}81$ кб. д. **789.** $S=612\pi$ кв. см.; $V=2304\pi$ кб. см. **790.** $\pi h(2a+b+d)=2486{,}88$ кв. дцм.; $\frac{\pi h^2}{3}(3a-\sqrt{b^2-h^2}-\sqrt{d^2-h^2})=$ $=6480{,}96$ кб. дцм. **791.** $\pi(a+c)\sqrt{(a-c)^2+h^2}=125{,}6$ кв. ф.; $\frac{\pi(a^2+c^2)h}{3}=125{,}6$ кб. ф. **792.** $\frac{\pi\sqrt{b^2+4h^2}}{4}[4(b+2n)+b^2+2bn]=$ $=512\pi$ кв. см.; $\frac{\pi bh(b+2n)}{2}=768\pi$ кб. см. **793.** 987,22 кв. см.; 3323,38 кб. см. **794.** $\frac{7\pi a^2}{2}=113{,}4$ кв. см.; $\frac{7\pi a^3\sqrt{3}}{12}=195{,}56$ кб. см. **795.** $4\pi a(a+2n)=816{,}4$ кв. см.; $\frac{\pi a^2\sqrt{3}}{12}(5a+12n)=814{,}83$ кб. см. **796.** $33{,}6\pi\sqrt{5}=236{,}33$ кв. дцм.; $200\pi\sqrt{5}=1406{,}94$ кб. дцм. **797.** $S_1=1410\pi$ кв. см.; $S_2=1290\pi$ кв. см.; $W_1=1300\pi$ кб. см.; $W_2=1100\pi$ кб. см. **798.** $S_1=160{,}8\pi$ кв. см.; $S_2=127{,}2\pi$ кв. см.; $V_1=81{,}6\pi$ кб. см.; $V_2=62{,}4\pi$ кб. см. **799.** 216π кв. см.; $259{,}8\pi$ кб. см. **800.** $S=168\pi$ кв. см.; $W=176\pi$ кб. см. **801.** $\pi a^2(5+4\sqrt{3})$ кв. ед.; $\frac{2\pi a^3}{3}(6+\sqrt{3})$ кб. ед. **802.** $S=\frac{4\pi ab(a+b)}{a^2+b^2}\sqrt{a^2+b^2}=33{,}76$ кв. дцм.; $V=\frac{2\pi a^2b^2}{a^2+b^2}\sqrt{a^2+b^2}=11{,}58$ кб. дцм. **803.** $S=2\pi d_1p=16{,}33$ кв. м.; $V=\frac{\pi pd_1^2\sqrt{2}}{4}=2{,}88$ кб. м.; **804.** $\pi\sqrt{3}(a+b)^2=1961{,}02$ кв. см.; $\frac{\pi a}{4}(3a^2+3ab+b^2)=6904{,}86$ кб. см. **805.** $12\pi a^2=36\pi$ кв. см.; $3\pi a^3\sqrt{3}=$ $=27\pi$ кб. см. **806.** $\pi a^2\sqrt{5(5+2\sqrt{5})}$ кв. ед. **807.** $6\pi a^2\sqrt{3}=10{,}39\pi$ кв. м.; $\frac{9\pi a^3}{2}=14{,}174$ кб. м. **808.** $\pi R^2\sqrt{2(5+\sqrt{5})}=136{,}8\pi$ кв. см.; $\frac{\pi R^3}{6}(5+\sqrt{5})=260{,}64\pi$ кб. см. **809.** $875\pi\sqrt{3}$ кв. см.; $3533{,}5\pi$ кб. см. **810.** $\pi a^2(9+7\sqrt{3})=2111\pi$ кв. см.; $\pi a^3(7+3\sqrt{3})=12190\pi$ кб. см. **811.** 6 см. **812.** 15 см., 20 см. и 25 см. **813.** $\frac{m\sqrt{V^2+V_1^2}}{\sqrt[6]{(m^2+n^2)^3\pi^2V^2V_1^2}}=6$ д.;

$\frac{n\sqrt{V^2+V_1^2}}{\sqrt[6]{(m^2+n^2)^3\pi^2V^2V_1^2}}=8$ д. **814.** $\frac{S}{4\pi}=32$ кв. см. **815.** 8 см. **816.** $\frac{2\pi mh^2-3V}{\pi h^2}=14$ см. **817.** $\frac{\pi r_1^2(r+H)}{r}=46{,}07$ кв. дюйм.; $\frac{\pi r_1^3H}{r}=67{,}01$ кб. дюйм. **818.** $\frac{m^2M}{m^2+n^2}=18$ кв. дцм.; $\frac{n^2M}{m^2+n^2}=32$ кв. дцм. **819.** $r\sqrt{\frac{S_1}{S}}=3$ фут. **820.** $\frac{\pi r^2H_1^3}{3H^2}=68\pi$ кб. см. **821.** $\frac{m^3N}{m^3+n^3}=$ $=2$ кб. арш.; $\frac{n^3N}{m^3+n^3}=16$ кб. арш. **822.** $8V=160$ кб. дцм. **823.** $r:\sqrt{rr_1}=2:3$. **824.** $\sqrt{R^2-r^2}=12$ см. **825.** $\frac{\sqrt{4R^2\pi^2-C^2}}{2\pi}=$ $=6$ дцм. **826.** $\sqrt{\frac{C^2}{4\pi^2}+m^2}=5$ см. **827.** $\sqrt{\frac{k}{\pi}+m^2}=7$ дюйм. **828.** $\frac{m^2n}{n-1}=32$ фут. **829.** $\frac{an}{\sqrt{n^2-m^2}}=10$ см. **830.** $\frac{2\pi Q+\pi a^2+P-Q}{2\pi a}=10$ см. **831.** $\sqrt{R^2+Q^2}=10$ дцм. **832.** 6,72 дцм. **833.** $\frac{2}{3}R\sqrt{3}=6$ см. **834.** $\frac{R}{2}\sqrt{6}$.

Указаніе. Разсмотрѣть прямоугольный треугольникъ, вершинами котораго служатъ центръ шара, одна изъ данныхъ точекъ на поверхности шара и вершина треграннаго угла; примѣнить теорему о перпендикулярѣ, опущенномъ на гипотенузу. **835.** $4\pi R^2=113{,}08$ кв. см. **836.** $\sqrt{\frac{S}{4\pi}}=5$ фут. **837.** $\frac{C^2}{\pi}=201{,}02$ кв. см. **838.** $4K=240$ кв. дм. **839.** 3 фут. **840.** a) Увелич. въ $m^2=4$ раза; b) уменьш. въ $n^2=9$ разъ. **841.** $\frac{4\pi m^2\pm S}{8\pi m}$; 5 дцм. и 3 дцм. **842.** $\frac{p\sqrt{m}}{\sqrt{m}+\sqrt{n}}=2$ см.; $\frac{p\sqrt{n}}{\sqrt{m}+\sqrt{n}}=4$ см. **843.** $\sqrt{r^2+r_1^2+r_2^2}=7$ см. **844.** $\frac{360^2l^2}{\pi n^2}=$ $=100$ кв. см. **845.** a) 288π кб. см. b) 65,45 кб. фут. **846.** $\frac{C^3}{6\pi^2}=36\pi$ кб. дцм. **847.** $\sqrt[3]{36\pi V^2}=144\pi$ кв. см. **848.** $\frac{S}{6}\sqrt{\frac{S}{\pi}}=20\frac{5}{6}$ кб. верш. **849.** a) Увеличится въ $\sqrt[3]{m^2}=4$ раза;

b) уменьшится въ $\sqrt[3]{n^2}=9$ разъ. **850.** 592 кб. дцм.

851. $\frac{\pi n a^3}{3(n-4)}\sqrt{\frac{2n}{n-4}}$ кб. ед. **852.** $\sqrt{m^3}:\sqrt{n^3}=8:27$.

853. 12 см. и 9 см. **854.** $\frac{m}{2}\pm\sqrt{\frac{3V-\pi m^3}{3\pi m}}$; 3 см.; 6 см.

855. $\frac{d}{2}\left(\frac{3S}{2\pi}+2d^2-3d\sqrt{\frac{S}{\pi}}\right)$ кб. ед. **856.** $\frac{\pi}{3d}(d^4+3r^4)$.

857. $2\pi Rh=90,4$ кв. дм. **858.** $\pi(r^2+h^2)=630$ кв. см.

859. $2R-\sqrt{4R^2-\frac{S}{\pi}}=4$ см. **860.** $2\pi R(R-\sqrt{R^2-r^2})=31,41$ кв. см.

861. 7,02 кв.ф. **862.** $\frac{S}{2\sqrt{S\pi-\pi^2r^2}}=8^1/_3$ фут. **863.** $\sqrt{\frac{S-\pi h^2}{2\pi}}=6$ дюйм. **864.** $\frac{\sqrt{S(4\pi R^2-S)}}{2\pi R}=4,2$ см. **865.** $\frac{2R(n-1)}{n}=4$ дм.

866. $\frac{\pi h^2}{3}(3R-h)=14,65$ кб. дм. **867.** $\frac{2(3V+\pi h^3)}{3h}=32\pi$ кв. дцм.

868. 275,2 кб. верш. **869.** $\frac{(\pi r^2+S)}{6}\sqrt{\frac{S}{\pi}-r^2}=720,08$ кв. см.

870. $\frac{\pi h^2}{3}(3R-h)=435,44$ кб. фут., гдѣ $h=R-\sqrt{R^2-r^2}$.

871. $\frac{3Sh-2\pi h^3}{6}=168\pi$ кб. арш. **872.** $\frac{\pi h(3r^2+h^2)}{6}=1916,38$ кб.см.

873. $\frac{h^2}{6}(3\sqrt{S\pi}-2\pi h)=13,5\pi$ кб. см. **874.** 1244,06 кв. см.; 3958,4 кв. см.; 1809,55 кб. см.; 22619,4 кб. см.

875. $\frac{4\pi R^3n^2(3m+n)}{3(m+n)^3}=28,22\pi$ кб. дюйм. **876.** $\frac{S^2(6\pi R^2-S)}{24\pi^2R^3}=184,64$ кб. дюйм. **877.** $2\sqrt[3]{12\pi^2V}=24\pi$ кв. см.

878. a) $\pi R^2(2,5-\sqrt{3})$ кв. ед.; $\frac{2\pi R^3}{3}\left(1-\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$ кб. ед.;

b) $\pi R^2\left(2-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ кв. ед.; $\frac{\pi 2R^3}{3}\left(1-\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$ кб. ед.;

c) $\pi R^2\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ кв. ед.; $\frac{\pi R^3}{3}$ кб. ед. **879.** $\pi R[2h+\sqrt{h(2R-h)}]=171,6\pi$ кв. см. **880.** $\frac{2}{3}\pi R^2h=50\pi=157$ кб. дцм.

881. $\frac{SR}{3}=210\pi$ кв. см. **882.** $\frac{3V}{R}=300$ кв. см.; $\frac{3V}{2\pi R^2}=4,75$ см. **883.** $\frac{S^2}{6\pi V}=1,5$ дцм. **884.** $\frac{\pi(r^2+h^2)^2}{6h}=5440$ кб. дм. **885.** $\frac{2}{3}\pi R^2(R-\sqrt{R^2-r^2})=52,32$ кб. вершк.; $2\pi R(R-\sqrt{R^2-r^2})=31,4$ кв. в. **886.** $\frac{S^2}{6\sqrt{\pi(S-\pi r^2)}}=593,75$ кб. дм.

887. $\sqrt{\sqrt{\frac{6Vh}{\pi}}-h^2}=4$ фут. **888.** $\frac{\pi R^3}{3}(2-\sqrt{3})$ кб. ед.

889. 9 : 29. **890.** 300 кб. см. **891.** Зависимости не существуетъ. Формула $2\pi Rh$ измѣняется только въ зависимости отъ R и h.

892. 0,95 дм. **893.** 3,8 дцм. **894.** $\frac{R}{2}$. **895.** $2\pi R(m-\sqrt{R^2-r^2})=182\pi$ кв. см. **896.** $\pi\sqrt{(r^2-r_1^2-h^2)^2+4r^2h^2}=40\pi$ кв. см.

897. $2\pi R(\sqrt{R^2-r_1^2}-\sqrt{R^2-r^2})=31,91$ кв. фут. **898.** 5 см.

899. $\sqrt{\frac{S_n-S}{\pi}-r^2}=3$ дцм. **900.** 6,4 дм. и 4,8 дм. **901.** 16 см. и 12 см. **902.** $\frac{2\pi}{m+n}\sqrt{(r^2-r_1^2)(m^2r^2-h^2r_1^2)}=21,6\pi$ кв. см.

903. $\frac{\pi h}{6}(3r^2+3r_1^2+h^2)=138\pi$ кб. дцм. **904.** $\frac{\pi h}{6}(3r^2+3r_1^2+h^2)=102,66\pi$ кб. дцм., гдѣ $h=\sqrt{R^2-r_1^2}-\sqrt{R^2-r^2}$. **905.** 351π кб. дюйм.

906. $\frac{\pi h}{3}(3R^2-h^2)=66\pi$ кб. см. **907.** 8 дцм; 79,6 кб. дцм

908. $23,96\pi$ кб. дюйм. **909.** 90π кв. вершк. **910.** 2 дцм.

911. $81,08\pi$ кб. см. **912.** $648,62\pi$ кб. дцм. **913.** πr^3. **914.** $\frac{3\pi a^3}{32}=18,84$ кб. дцм. **915.** $\pi r^2(2+\sqrt{2})=105,37$ кв. см.; $\frac{\pi r^3}{3}=310,86$ кб. см.

916. $\frac{\pi r^2}{3}(3\sqrt{3}-\pi)$ кв. ед.; $\frac{\pi r^3}{24}(9\sqrt{3}-4\pi)$ кб. ед. **917.** 3,77 кб. см.

918. $\pi a^2=25\pi$ кв. см. **919.** $\frac{4\pi R^2r^2}{3(R+r)}$ кб. ед. **920.** $\frac{\pi r^2}{2}(4-\sqrt{2})$; $\frac{\pi r^3}{6}(3\sqrt{2}-4)$. **921a.** $4\pi^2r^2$ кв. см.; $2\pi^2r^3$ кб. см. **921b.** $4\pi^2rd$ кв. ед.; $2\pi^2r^2d$ кб. ед. **922.** 1) $2\pi^2rd+4\pi r^2=296,13$ кв. дм.; $\frac{\pi r^2}{3}(3\pi d+4r)=$

$=556{,}72$ кб. дм. 2) $2\pi^2rd-4\pi r^2=183{,}03$ кв. дм.; $\frac{\pi r^2}{3}(3\pi d-4r)=$ $=330{,}64$ кб. дм. **923.** $\frac{\pi a^2}{4}(\pi+1)$ кв. ед.; $\frac{\pi a^3}{36}(26-3\pi)$ кб. ед. **924.** $\frac{\pi^2a^2}{2}$ кв. ед.; $\frac{5\pi a^3}{12}$ кв. ед. **925.** $2\pi^2a^2$ кв. ед.; $\frac{\pi a^3}{3}(16-3\pi)$ кб. ед. **926.** πa^2; $\frac{25}{24}\pi a^3$. **927.** $\pi^2r^3=1232{,}45$ кб. см. **928.** 12,41 см.; 1 : 0,806. **929.** $\frac{5}{16}a$. **930.** $\frac{\pi}{6}D^3$, гдѣ $D=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$. **931.** $\frac{\pi(m^2n^2+m^2p^2+n^2p^2)}{mnp}\sqrt[3]{\frac{V^2}{mnp}}$ кв. ед. **932.** $\frac{71\pi a^2}{48}$ кв. ед. **933.** $12r^2\sqrt{3}$; $4r^3\sqrt{3}$.

934. $\frac{R}{5}\sqrt[3]{5\sqrt{5}}$. **Указаніе.** Обозначая искомый радіусъ черезъ x, найдемъ, что высота призмы $2x$, а высота основанія призмы $3x$.

935. $4r^3(3+2\sqrt{3})$ кб. ед. **936.** $\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{V(2\sqrt{2}-\sqrt{3})}{22}}$. **937.** $\frac{a}{12h}(2h\sqrt{3}-a)$. **938.** $\frac{4m^2(m+n)^2}{3(m-n)}$. **939.** $202^2/_3$ кб. см. **940.** $\frac{9R^3\sqrt{3}}{16}$ кб. ед. **941.** $\frac{3a\sqrt{2}}{4}$. **942.** $\frac{8\pi R^3}{9}(\sqrt{7}+1)$ кб. ед. **943.** $2\pi a^2(3-2\sqrt{2})$ кв. ед. **944.** $\frac{\pi p}{2}(p\pm\sqrt{2d^2-p^2})$ кв. ед. **945.** $(6n-3m):4m=3:2$. **946.** $4\pi r^2$ кв. ед.; $2\pi r^3$ кб. ед. **947.** $\frac{3V}{3}$ кб. ед. **948.** $2R\sqrt{\frac{3}{2m+3}}$. **949.** $\frac{R}{3}$. **950.** $\frac{3}{4}\pi^2R^2$ кв. ед.; $\frac{3}{32}\pi^2R^3$ кб. ед. **951.** 16 : 9; 32 : 9. **952.** $\frac{1}{4}(1+\sqrt{2})^3$. **953.** 4188,78 кб. см.; 39488 кб. см.; 1256,64 кв. см:, 5607,8 кв. см. **954.** $2R(m\pm\sqrt{m^2-2m})$. **955.** $\pi(l^2-l_1^2)$ кв. ед. **956.** $\frac{R}{a}\sqrt{a^2-R^2}$. **957.** $\frac{4}{5}r$. **958.** 21,48 кб. см. **959.** $\frac{4\pi R^3}{3}(5\sqrt{2}-7)$. **960.** $\frac{\pi r^3}{3}(2+3\sqrt{2})$. **961.** $\frac{4}{3}\pi rr_1\sqrt{rr_1}$ кб. ед. **962.** $4r^2=24$ кв. см.; $\frac{2}{9}r^3\sqrt{6}=8$ кб. см. **963.** r^3 кб. ед. **964.** $\left(\frac{R+a}{R-a}\right)^3$.

965. $\frac{6}{5}\pi R^2$ кв. ед. **966.** $S-\pi h^2+\sqrt{S(S-\pi h^2)}$ кв. ед.; $\frac{h}{3}(S-\pi h^2)$ кб. ед. **967.** $2h\sqrt{4R^2-h^2}$. **968.** $\frac{R}{4}(7-\sqrt{17})$. **969.** 52985 кв. см.; 576,1 кб. см. **970.** $\frac{1}{6}\pi(R-a)^2.(R+2a)$; $\frac{1}{6}\pi(R-a)^2.(2R+a)$. **971.** $\frac{\pi R^3\sqrt{3}}{2}$ кб. ед. **972.** $\frac{\pi d[4rr_1-(r+r_1)d]}{r+r_1-d}$ кв. ед.; $\frac{\pi d^2[12rr_1-4(r+r_1)d+d^2]}{12(r+r_1-d)}$ кб. ед. **973.** $\frac{4r^3\sqrt{2}}{3}$ кб. ед. **974.** $\frac{r}{2}(\sqrt{6}\pm2)$. **975.** $R(3-2\sqrt{2})$. **976.** πa^2 кв. ед.; $\frac{\pi a^3}{6}$ кб. ед. **977.** $3\pi a^2$ кв. ед.; $\frac{\pi a^3\sqrt{3}}{2}$ кб. ед. **978.** $\frac{\pi a^2}{6}$ кв. ед.; $\frac{\pi a^3\sqrt{6}}{216}$ кб. ед. **979.** $\frac{3\pi a^2}{2}$; $\frac{3\pi a^3\sqrt{6}}{24}$. **980.** $\frac{2\pi a^2}{3}$; $\frac{\pi a^3\sqrt{6}}{27}$. **981.** $2\pi a^2$; $\frac{\pi a^3\sqrt{2}}{3}$. **982.** $\frac{3\pi a^2}{2}(3+\sqrt{5})$; $\frac{\pi a^3}{8}(4\sqrt{15}+9\sqrt{3})$. **983.** $\frac{\pi a^2}{10}(25+11\sqrt{5})$; $\frac{\pi a^3}{60}\sqrt{\frac{(25+11\sqrt{5})^3}{10}}$ кб. ед. **984.** $\frac{\pi a^2}{6}(7+3\sqrt{5})$; $\frac{\pi a^3\sqrt{3}}{54}(9+4\sqrt{5})$.

Указаніе. Концы реберъ, выходящихъ изъ вершинъ икосаэдра, лежатъ въ одной плоскости, отъ пересѣченія которой съ гранями получается правильный пятиугольникъ со стороной, равной ребру икосаэдра.

985. $\frac{\pi a^2}{2}(\sqrt{5}+5)$; $\frac{\pi a^3}{6}\sqrt{5(5+2\sqrt{5})}$; см. указаніе къ предыдущей задачѣ. **986.** $\frac{R}{3}$. **987.** $r\sqrt{3}$. **988.** $r\sqrt{3}$. **989.** $R\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}$. **990.** $R\sqrt{3(5-2\sqrt{5})}$. **991.** 1 : 2 : 3. **992.** 1) 1 : 3 : 9; 2) 2 : 3 : 6. **993.** $(43-24\sqrt{3}):11$. **Указаніе.** Ввести въ вычисленіе радіусъ вписаннаго шара. **994.** 7 : 20. См. указаніе къ предыдущей задачѣ. **995.** $\frac{m\sqrt{3}}{3}$. **996.** $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. **997.** $\frac{b}{2}\sqrt{a^2+(m-n)^2}$. **998.** $\frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+b^2)}$. **999.** 60°. **1000.** 2,2 дцм.; 60°. **1001.** $720°(n-1)$; $360°(n-1)$. **1002.** 65 см. **1003.** $\frac{2}{3}a^3=18$ кб. см.

1004. $\frac{a^3}{8}\sqrt{15(5+2\sqrt{5})}$. **1005.** $\frac{a^2MN}{M^2+N^2}+\sqrt{M^2+N^2}+M+N=$ $=950,8$ кв. см. **1006.** $n:2\sqrt{3(4-n^2)}$. **1007.** [illegible]am кв. ед. **Указаніе.** Ввести въ вычисленіе боковыя ребра усѣченной призмы и, воспользовавшись свойствомъ средней линіи трапеціи, выразить ихъ черезъ m. **1008.** $\frac{d_2^2}{4}\sqrt{3d_1^2-d_2^2}$. **1009.** 62,5 кб. дюйм. **1010.** $\frac{M^2\sqrt{3}}{8a}$.

1011. 1224 кв. см.; 2800 кб. см. **1012.** 129,6 кв. дцм.; 97,2 кб. дцм.

1013. $\sqrt{M^2+N^2+P^2}=31,24$ кв. фут. **1014.** $\frac{a^2(b^3-mnp)}{12b^3}\sqrt{3b^2-a^2}$.

1015. $\frac{abc-abm-acn-bcp}{\sqrt{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}}=2,83$ фут.

1015a. $-\frac{abm+acn+bcp-abc}{\sqrt{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}}=1,97$ фут. **1016.** $\frac{a^2(b+c)}{6}=18$ кб. см.

1017. $\frac{abc}{a_1b_1c_1}=3,2$. **1018.** $\frac{60^\circ}{n}(5n-6)$. **1019.** $\frac{ab}{a+b}=1,2$ см.

1020. $m^2:c^2=25:64$. **1021.** a) $H\frac{\sqrt{\frac{1}{2}(g+g_1)}-\sqrt{g_1}}{\sqrt{g}-\sqrt{g_1}}$; b) $\frac{H}{1+\sqrt[4]{\frac{g}{g_1}}}$.

1022. $\frac{1}{9}(g+4\sqrt{gg_1}+4g)=19,6$ кв. см.; $\frac{1}{9}(4g_1+4\sqrt{gg_1}+g)=$ $=25,6$ кв. см. **1023.** $\frac{q(m-1)}{p}=\frac{4}{17}$. **1024.** $\frac{3R^2}{8}(3\sqrt{15}+5\sqrt{3})$ кв. ед.; $\frac{21R^3}{16}$ кб. ед. **1025.** 26240,1 кв. см.; 11259,4 кв. см.; 318560 кб. см.; 77207 кб. см. **1026.** 2010,61 кб. см. **1027.** $\frac{16}{125}\pi(R^3-r^3)$ кб. ед.

1028. 703,71 кв. см. **1029.** $\frac{4}{9}\pi r^2$ кв. ед.; $\frac{3}{8}\pi r^3$ кб. ед. **1030.** $9:4:3$.

1031. $12\pi r^2$. **1032.** $6:25$. **1033.** $2\pi(l^2-r^2)$ кв. ед. **1034.** $\frac{R}{4}(4+\sqrt{17})$.

1035. $\frac{4}{3}\pi r^3$. **1036.** $\frac{ab}{a+b}$. **1037.** $\frac{4\pi(b^2+c^2)\Delta^2}{3abc}$, гдѣ Δ — площадь треугольника. **1038.** $\sqrt{\frac{9V^2V_1}{4\pi^2\sqrt{4V^2-V_1^2}}}$ кв. ед.

1039. $\frac{\pi a\sqrt{a^2+b^2}}{2b^2(a^2+b^2)}(3b^4+4ab^3-2a^2b^2-a^4)$ кв. ед.; $\frac{\pi a^2\sqrt{a^2+b^2}}{12b^2(a^2+b^2)^2}(5a^2b^4-3a^4b^2-a^6+7b^6)$ кв. ед. **1040.** 9372,8 кв. см.; 50723 кб. см. **1041.** 4976,2 кв. см.; 19000,3 кб. см. **1042.** 339,29 кв. дцм.; 542,86 кб. дцм. **1043.** $\frac{\pi mh^2-3V}{\pi h^2}=14$ см. **1044.** $2\pi Pd$ кв. ед.

1045. $2\pi Qd$ кб. ед. **1046.** $6\pi a^2\sqrt{2}$ кв. ед.; $\frac{\pi a^3}{6}(8-\sqrt{2})$ кб. ед.

1047. Третью часть. **1048.** $\frac{d+R-r}{d-R+r}$. **1049.** Одинаковы.

1050. 5 см. и 12 см. **1051.** 2148,84 кв. см.; 3166,7 кб. см.; 6 : 1.

1052. $\frac{m^2(m+3n)}{n^2(n+3m)}$. **1053.** $\pi\sqrt{r^4+3r_1^4+16r_2^4-2r^2r_1^2-8r^2r_2^2-8r_1^2r_2^2}$. **Указаніе.** Задача сводится къ рѣшенію трехъ уравненій съ тремя неизвѣстными. Обозначивъ радіусъ шара черезъ R, высоту слоя черезъ h, а разстояніе большаго основанія слоя отъ центра шара черезъ x, получимъ уравненія $R^2=r^2+x^2=r_1^2+(x+h)^2=r_2^2+\left(x+\frac{h}{2}\right)^2$.

1054. 960,84 кб. см. **1055.** $\frac{1}{4}N\,.\,a_n\,.\,n\,.\,\sqrt{4R^2-4r^2-a_n^2}$ кв. ед.

1056. $\frac{1}{12}Na_nnr\sqrt{4R^2-4r^2-a_n^2}$ кб. ед.

Смирновскій, П. Выпускъ VI. (Князь Иванъ Долгорукій. Сатира кн. Горчакова, Миронова и другія). Ц. 1 руб.

— Выпускъ VII. (Ком. Загоскина; А. С. Грибоѣдовъ и другія). Ц. 80 коп.

— Выпускъ VIII. (Грибоѣдовъ А. С.—оконч.). Ц. 80 коп.

Ясинскій, Е. Систематическій диктантъ для среднихъ учебныхъ заведеній и городскихъ училищъ, часть I. Этимологія. Ц. 60 коп.

Гоголь. Н. В. Полное собраніе сочиненій въ одномъ томѣ большого формата. Съ 245 гравированными рисунками академика Брожа, М. Михайлова и другихъ и 28 снимками фотографіи Шапиро, артиста Андрея Бурлака въ роли «Записки сумасшедшаго». Съ біографіей, составилъ П. В. Смирновскимъ. Ц. 1 руб. 50 коп.

Въ переплетѣ съ тисненіемъ золотомъ Ц. 2 руб. 25 коп.

Министер. Народнаго Просвѣщенія отъ 18 февраля 1903 года за № 5916 допущено въ ученическія библіотеки низшихъ училищъ и въ безплатныя народныя читальни и библіотеки.

Добролюбовъ, Н. А. Полное собраніе сочиненій въ 4 томахъ, подъ редакціей М. В. Лемке, съ его вступительными замѣтками въ каждой статьѣ Н. А. Добролюбова, примѣчаніями и біографическимъ очеркомъ. Съ приложеніемъ трехъ портретовъ Н. А. Добролюбова, его факсимиле и именного алфавитнаго указателя ко всѣмъ четыремъ томамъ. Цѣна въ бум. 5 руб.

Въ коленкоровомъ переплетѣ съ тисненіемъ золотомъ. Ц. 7 руб.

Жуковскій, В. А. Сочиненія, полное собраніе, въ одномъ томѣ, подъ редакціей П. В. Смирновскаго, съ рисунками въ текстѣ художника А. Чикина, съ факсимиле В. А. Жуковскаго, съ портретомъ и біографіей, составилъ А. Фонъ Дитмаръ и одобренной сыномъ поэта. Ц. 1 руб. 50 коп.

Въ коленкоровомъ переплетѣ. Ц. 2 руб. 25 коп.

Министер. Народнаго Просвѣщенія отъ 8 февраля 1902 года № 5916 допущено въ ученическія библіотеки низшихъ училищъ и въ безплатныя народныя читальни и библіотеки.

Лермонтовъ, М. Ю. Полное собраніе сочиненій подъ редакціей П. В. Смирновскаго и съ составленнымъ имъ же біографическимъ очеркомъ Лермонтова, съ его портретомъ и 40 оригинальными иллюстраціями А. А. Чикина. Въ коленкоровомъ переплетѣ. Ц. 1 руб. 60 коп.

Министер. Народнаго Просвѣщенія отъ 7 мая 1903 года за № 12372 допущено въ безплатныя народныя библіотеки и читальни.

Никитинъ, И. С. Полное собраніе сочиненій въ одномъ томѣ подъ редакціей М. Гершензона, въ бум. Ц. 80 коп.

Въ коленкоровомъ переплетѣ. Ц. 1 руб. 40 коп.

Пушкинъ, А. С. Полное собраніе сочиненій въ одномъ томѣ подъ редакціей П. Смирновскаго, съ портретомъ Пушкина, его біографіей, факсимиле, видомъ памятника и съ рисунками М. Михайлова и В. Спасскаго. Ц. 1 руб. 50 коп.

Въ переплетѣ съ золотомъ. Ц. 2 руб. 25 коп.

Министер. Народнаго Просвѣщенія отъ 14 іюля 1905 года за № 8268 допущено въ безплатныя читальни и библіотеки.

Имѣются въ продажѣ слѣдующія книги тѣхъ же авторовъ:

1) **Методическій сборникъ геометрическихъ задачъ**, часть I. Планиметрія. Ц. 70 коп.

2 и 3) **Учебникъ прямолинейной тригонометріи.** (Составленъ примѣнительно къ программѣ Министерства Народнаго Просвѣщенія отъ 26 и 30 іюня 1906 года). Часть I. Ц. 50 коп. Часть II. Ц. 50 коп.

Книги А. Д. Лямина:

1) **Прямолинейная тригонометрія** для средне-учебныхъ заведеній. Ц. 60 коп.

Ученымъ Комитетомъ Министерства Народнаго Просвѣщенія **допущена** въ качествѣ руководства для мужскихъ гимназій.

2) **Методическій сборникъ задачъ прямолинейной тригонометріи** (съ приложеніемъ стѣнной таблицы формулъ тригонометріи). Ц. 75 коп.

Ученымъ Комитетомъ Министерства Народнаго Просвѣщенія **допущенъ** въ качествѣ пособія для средне-учебныхъ заведеній.

3) **Измѣненіе тригонометрическихъ функцій съ измѣненіемъ угла.** (Наглядное пособіе въ примѣненіи принципа живой фотографіи.) Ц. 25 коп.

Ученымъ Комитетомъ Министерства Народнаго Просвѣщенія **допущено** въ качествѣ необязательнаго пособія для средне-учебныхъ заведеній.

4) **Приложеніе алгебры къ геометріи** для мужскихъ гимназій. Ц. 25 коп.

Ученымъ Комитетомъ Министерства Народнаго Просвѣщенія **допущено** въ качествѣ необязательнаго пособія для мужскихъ гимназій.

5) **Элементарная теорія разложенія на множителей алгебраическихъ выраженій.** Ц. 30 коп.

6 и 7) **Физико-Математическая хрестоматія,** т. I.—Ариѳметика. Ц. 1 р. 25 коп., т. II.—Алгебра. Ц. 1 руб. 50 коп. (слѣдующіе 3 тома — Геометрія, Тригонометрія и Физика — готовятся къ печати).

Книга Т. Ѳ. Сваричовскаго.

1) **Методическій сборникъ геометрическихъ задачъ на тѣла вращенія.** Ц. 50 коп.
